72.1438

Acad. GHEORGHE MIHOC

ILEANA NĂDEJDE

818
D1835

PROGRAMAREA matematică

PROGRAMAREA PARAMETRICĂ ŞI NELINIARĂ

EDITURA ŞTIINŢIFICA

Scanned with OKEN Scanner

Acad. Gheorghe Mihoc

Ileana Nădejde

Ministerul Apărării Naționale
Unitatea militară 2. 2
COTA: 72.1438
BIBLIOTECA

PROGRAMAREA MATEMATICĂ

PROGRAMAREA PARAMETRICĂ ȘI NELINIARĂ

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

În ultimii ani, problemele programării matematice constituie o preocupare accentuată a matematicienilor, inginerilor și economiștilor din țara noastră. Această preocupare, justificată din punctul de vedere al cercetării fundamentale prin numărul și importanța problemelor încă nerezolvate în acest domeniu nou de investigație, este întemeiată și din punctul de vedere al cercetării aplicative. Dezvoltarea impetuoasă a economiei noastre naționale implică folosirea metodelor matematice în multe și variate probleme în care colaborarea dintre economiști, ingineri și matematicieni, bazată pe un limbaj comun, s-a dovedit a fi fructuoasă. Acest limbaj este acel al programării matematice.

Revistele de specialitate reflectă interesul mereu sporit pentru disciplina programării matematice, prin numărul mare de articole din acest domeniu.

Sesiunile de comunicări științifice din diferite domenii ale științei și tehnicii includ în programul lor un număr important de referate care relatează atît rezultatele fundamentale, cît și aplicațiile practice ale programării.

Numărul lucrărilor de sinteză care prezintă o expunere sistematică a metodelor proprii programării este încă foarte restrîns, în comparație cu numărul cărților de acest gen care au apărut și continuă să apară în alte țări. De asemenea se poate afirma că literatura noastră de specialitate nu a abordat, sub această formă, decît unele dintre problemele de programare liniară și de teoria jocurilor.

Această lucrare expune, în primul capitol, unele variante ale algoritmului simplex care nu au fost publicate în nici una din lucrările anterior apărute în limba română. In afară de faptul că aceste algoritme sînt folosite în rezolvarea problemelor de reoptimizare și programare parametrică, ele sînt utile și în rezolvarea multor probleme de programare liniară cu caracter practic.

Reoptimizările în problemele de programare liniară sînt, dintr-un anumit punct de vedere, cazuri particulare ale programării parametrice. În timp ce în programarea parametrică se studiază soluțiile problemelor în care unul sau mai mulți parametri pot lua valori pe toată mulțimea numerelor reale sau în anumite intervale, reoptimizarea poate fi pri-

Scanned with OKEN Scanner

vită ca o problemă de programare parametrică în care parametrii iau valori determinate. Din punct de vedere practic, cunoașterea posibilităților de reoptimizare a soluției unei probleme în care se modifică unii dintre coeficienți echivalează cu o economie de muncă, economie importantă atît în cazurile în care rezolvarea necesită folosirea mașinilor electronice de calcul, cît și în cazurile în care soluția se obține prin calcul manual.

Programarea parametrică poate fi de asemenea interpretată ca un caz particular al programării stochastice, cazul în care parametrii nu sînt variabile aleatoare.

În această lucrare sînt analizate cazurile de parametrizare liniară și neliniară a coeficienților în modelele de programare liniară și în modelele problemelor de tip transport. De asemenea sînt expuse și unele dintre problemele ridicate de viața economică în care programarea parametrică simplifică mult dificultățile de obținere a soluției.

Ultimul capitol al acestei lucrări se ocupă de unele dintre ideile și metodele de bază în programarea neliniară. O expunere completă a rezultatelor la care s-a ajuns în această direcție poate constitui singură obiectul unui tratat. Aici autorii s-au mărginit la elementele de programare neliniară strict necesare în expunerea problemelor de programare stochastică, obiectul volumului II al acestei lucrări.

Sperăm ca exemplele în care se folosesc date convenționale și cele cu caracter practic care însoțesc expunerea celor mai multe dintre metodele și algoritmele de reoptimizare, programare parametrică și neliniară, să înlăture dificultățile lecturii și mai ales să stimuleze utilizarea acestora în problemele ridicate de viața noastră economică.

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

METODE SIMPLEX

§ 1. INTRODUCERE

Programarea matematică este o metodă mult folosită în ultimii ani în analiza problemelor economice. Necesitatea utilizării matematicii în luarea hotărîrilor se impune ca urmare a creşterii gradului de complexitate a problemelor pe care le ridică economia, o dată cu dezvoltarea tehnicii. De cele mai multe ori, numărul mare de ipoteze care trebuie luate în considerare, numeroasele variabile care intervin în problema studiată, cum şi noţiunea de optim, nu pot fi temeinic analizate decît folosind metode matematice.

Este evident că rezultatele obţinute pe această cale depind în largă măsură de gradul de exactitate cu care au fost exprimate condiţiile tehnice şi economice în care se desfăşoară fenomenul studiat. Interpretarea acestor rezultate şi limitele aplicării lor practice constituie o problemă nouă, în soluţionarea căreia economiştii au un rol deosebit de important.

Analiza diferitelor aspecte ale activităţii economice cu ajutorul metodelor matematice este cunoscută sub denumirea de programare matematică. Condiţiile în care se desfăşoară activitatea analizată conduc la un sistem de relaţii — ecuaţii sau inecuaţii — care cuprind variabilele problemei şi coeficienţii tehnici care o caracterizează. Aceste relaţii alcătuiesc *restricţiile* problemei. Obiectivul studiului este optimizarea unui anumit rezultat dependent de aceleaşi variabile care figurează şi în restricţii. În formularea problemelor de programare matematică, obiectivul apare sub forma unei funcţii ale cărei valori maxime sau minime le căutăm şi care se numeşte *funcţie obiectiv*, *funcţie scop* sau *funcţie de eficienţă*.

Restricţiile problemei împreună cu funcţia obiectiv constituie modelul matematic al problemei de programare matematică. Dacă atît sistemul restricţiilor cît şi funcţia obiectiv sînt funcţii liniare de variabilele problemei, modelul constituie o problemă de programare liniară care poate fi scrisă sub formă algebrică, vectorială sau matricială.

Scanned with OKEN Scanner

Sub forma cea mai generală, modelul algebric al problemelor de programare liniară este următorul:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leqslant d_i \qquad i = 1, \ldots, k, \tag{I.1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geqslant d_i \qquad i = k+1, \ldots, p, \tag{I.1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = d_i \qquad i = p+1, \ldots, m, \tag{I.1.3}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{I.1.4}$$

$$\max^* \text{ sau } \min\ z = \sum_{j=i}^{n} c_j\, x_j. \tag{I.1.5}$$

Relaţiile (I.1.1), (I.1.2) şi (I.1.3) constituie sistemul restricţiilor. Coeficienţii a_{ij} se numesc *coeficienţi tehnici* şi sînt stabiliţi pe baza observării fenomenului studiat. Dacă aceşti coeficienţi sînt şi rămîn constanţi într-un interval de timp determinat, avem de studiat o problemă de *programare liniară*.

Dacă însă coeficienţii tehnici variază şi aceste variaţii pot fi exprimate ca funcţii de unul sau de mai mulţi parametri, modelul corespunde unei probleme de *programare parametrică*. În numeroase cazuri, coeficienţii tehnici sînt variabile aleatoare şi atunci problema propusă este o problemă de *programare stochastică*.

Condiţia (I.1.4) constituie obligativitatea de nenegativitate a variabilelor, condiţie logică din cauza sensului economic al problemelor de programare matematică. Variabilele x_j reprezintă nivelul la care trebuie desfăşurate activităţile $j = 1, \ldots, n$.

Cu această interpretare devine evident că nici o activitate nu poate fi desfăşurată la un nivel negativ.

Relaţia (I.1.5) exprimă matematic scopul sau obiectivul studiului întreprins. Coeficienţii c_j pot fi priviţi ca nişte „costuri" ataşate activităţilor $j = 1, \ldots, n$.

A rezolva o problemă de programare înseamnă a determina valorile nenegative ale variabilelor x_j care satisfac restricţiile (I.1.1), (I.1.2) şi (I.1.3) şi care optimizează — fac maximă sau minimă — funcţia obiectiv, sau altfel spus, rezolvarea problemei comportă determinarea nivelurilor x_j la care trebuie să se desfăşoare diferi-

* Prin max sau min z se înţelege: să se determine maximul sau minimul funcţiei z.

Scanned with OKEN Scanner

tele activităţi, astfel încît eficienţa economică a întregului plan de activitate să fie optimă.

Pentru rezolvarea problemelor de programare liniară s-au construit mai multe algoritme: *algoritmul primal, algoritmul dual, primal-dual, algoritmul bazat pe principiul de descompunere Dantzig-Wolfe* etc. Fiecare dintre aceste algoritme pot fi aplicate sub diferite forme şi prezintă avantaje determinate de structura problemei.

Elementul comun tuturor algoritmelor de rezolvare a problemelor de programare liniară este metoda iterativă, care constă în modificarea unei soluţii iniţiale pînă cînd funcţia obiectiv ia valoarea optimă sau pînă cînd se dovedeşte că optimul căutat nu există. De aici se deduce că oricare dintre algoritmele folosite trebuie să ofere posibilitatea determinării unei soluţii iniţiale şi un sistem de reguli care să îngăduie îmbunătăţirea acestei soluţii.

Orice sistem de valori ale variabilelor $x_j (j = 1, \ldots, n)$ care satisface relaţiile (I.1.1); (I.1.2) şi (I.1.3) constituie o *soluţie* a problemei.

Dacă toate variabilele x_j sînt nenegative dispunem de o *soluţie realizabilă* sau de un program de activitate.

Din formularea modelului rezultă că numărul m de restricţii ale problemei *nu* este obligatoriu egal cu numărul n al variabilelor.

În cele mai multe din problemele practice, numărul restricţiilor este mai mic decît al variabilelor ($m < n$). Dacă restricţiile sînt liniar independente şi numărul variabilelor nenule dintr-o soluţie a modelului este egal cu numărul restricţiilor, soluţia se numeşte *soluţie de bază*. Dacă numărul variabilelor nenule este mai mic decît numărul restricţiilor avem o *soluţie de bază degenerată*. Dacă într-o soluţie de bază toate valorile variabilelor sînt nenegative avem o *soluţie realizabilă de bază*. O soluţie realizabilă de bază care optimizează funcţia obiectiv se numeşte *soluţie optimă*.

Formularea vectorială a modelului problemelor de programare liniară se obţine din formularea algebrică dacă se notează cu *

$$\alpha_i(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \qquad i = 1, \ldots, m \tag{I.1.6}$$

vectorii-linie formaţi din coeficienţii tehnici din restricţia i;

$$x[x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{I.1.7}$$

vectorul-coloană format din variabile (acest vector poate fi numit *vectorul activităţilor* şi aparţine spaţiului R_n, spaţiul activităţilor);

$$c(c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{I.1.8}$$

vectorul-linie format din coeficienţii variabilelor din funcţia obiectiv sau *vectorul costurilor* (preţurilor).

* Vectorii-linie se vor nota cu ( ) şi vectorii-coloană cu [ ].

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceste notații, restricțiile problemei de programare liniară se scriu sub forma

$$\alpha_i x \leqslant d_i \qquad i = 1, \ldots, k, \tag{I.1.1'}$$

$$\alpha_i x \geqslant d_i \qquad i = k+1, \ldots, p, \tag{I.1.2'}$$

$$\alpha_i x = d_i \qquad i = p+1, \ldots, m. \tag{I.1.3'}$$

Condiția de nenegativitate a nivelurilor activităților este

$$x \geqslant 0, \tag{I.1.4'}$$

iar funcția obiectiv este

$$\max \text{ sau } \min z = cx. \tag{I.1.5'}$$

În relațiile (I.1.1'), (I.1.2') și (I.1.3'), mărimile d_i sînt scalari care reprezintă disponibilul sau cererea aferentă restricției i. Aceste mărimi pot fi privite ca fiind componentele unui vector-coloană notat cu d:

$$d[d_1, d_2, \ldots, d_m]. \tag{I.1.9}$$

Vectorul d poate fi numit *vectorul-cerere* sau *vectorul disponibilului* și aparține spațiului R_m, *spațiul restricțiilor*.

Problemele de programare liniară pot fi formulate matricial dacă toate inecuațiile din sistemul restricțiilor au același sens. Această condiție poate fi ușor îndeplinită înmulțind cu — 1 inecuațiile (I.1.1) sau (I.1.2) din modelul algebric sau inecuațiile echivalente (I.1.1') sau (I.1.2') din modelul vectorial. Notînd cu

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m] \tag{I.1.10}$$

vectorul-coloană ale cărui componente sînt vectorii-linie se obține matricea $m \times n$ dimensională

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{I.1.11}$$

Condițiile (I.1.1'), (I.1.2') și (I.1.3') se scriu sub forma:

$$Ax \leqslant d,$$

dacă se înmulțesc cu — 1 inecuațiile (I.1.2'), sau sub forma:

$$Ax \geqslant d,$$

dacă se înmulțesc cu — 1 inecuațiile (I.1.1').

Scanned with OKEN Scanner

Formularea matricială a modelului problemelor de programare liniară este deci

$$\begin{matrix} Ax \leqslant d \\ x \geqslant 0 \end{matrix} \quad \text{sau} \quad \begin{matrix} Ax \geqslant d \\ x \geqslant 0 \end{matrix}. \tag{I.1.12}$$

Toate inecuaţiile sistemului de restricţii pot fi transformate în egalităţi prin adunarea sau scăderea unor variabile nenegative numite *variabile de abatere*. Aceste modificări conduc la *forma standard* a problemei de programare liniară, care se scrie:

$$\begin{aligned} A_e x_e &= d, \\ x_e &\geqslant 0, \\ \max \text{ sau } \min z &= c_e x_e. \end{aligned} \tag{I.1.13}$$

În cele ce urmează se va arăta că forma standard, care constituie o problemă extinsă de programare liniară, este echivalentă cu forma algebrică şi vectorială a aceleiaşi probleme.

Matricea A_e se obţine adăugînd matricii A, p vectori-coloană ale căror elemente sînt nule, cu excepţia elementului situat pe linia i. Acest element ia valoarea:

$+ 1$ pentru inecuaţiile cu semnul $\leqslant$;

$- 1$ pentru inecuaţiile cu semnul $\geqslant$.

Vectorul x_e se construieşte adăugînd vectorului activităţilor x, p componente nenegative, notate $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}$, care reprezintă activităţi fictive. Coeficienţii acestor noi variabile în funcţia obiectiv sînt nuli, deoarece unei activităţi fictive nu i se poate ataşa decît un cost nul. De aici rezultă că vectorul c_e se obţine adăugînd vectorului c, p componente nule.

Pentru a stabili echivalenţa dintre o problemă de programarea liniară şi problema extinsă corespunzătoare se demonstrează următoarele teoreme:

Teorema I: Între soluţiile realizabile ale unei probleme de programare liniară şi soluţiile realizabile ale problemei extinse există o corespondenţă biunivocă.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie dată problema de programare liniară sub forma algebrică (I.1.1) — (I.1.5). Problema extinsă în forma algebrică se scrie astfel:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = d_i \qquad i = 1, \ldots, k, \tag{I.1.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = d_i \qquad i = k+1, \ldots, p, \tag{I.1.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = d_i \qquad i = p+1, \ldots, m, \tag{I.1.16}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, \ldots, n+p, \tag{I.1.17}$$

$$\max \text{ sau } \min z = \sum_{j=1}^{n+p} c_j x_j. \tag{I.1.18}$$

Fie $x^*[x_1^* \; x_2^* \ldots x_n \ldots x_{n+p}^*]$ o soluție realizabilă a sistemului extins. Din definiția soluțiilor realizabile rezultă că x^* are toate componentele nenegative și că verifică sistemul (I.1.14) — (I.1.16).

Vectorul $\bar{x}^*[x_1^* x_2^* \ldots x_n^*]$, format din primele n componente ale vectorului x^*, este o soluție realizabilă a sistemului (I.1.1) — (I.1.3), deci oricărei soluții realizabile a sistemului extins îi corespunde o soluție realizabilă a sistemului inițial. Reciproc, oricărui vector $\bar{x}^*[x_1^* x_2^* \ldots x_n^*]$, care constituie o soluție realizabilă a sistemului (I.1.1) — (I.1.3), i se pot atașa p componente nenegative $[x_{n+1}^*, \ldots, x_{n+p}^*]$, astfel ca noul vector să satisfacă sistemul (I.1.14) — (I.1.16).

Teorema II. Între soluțiile optime ale unei probleme de programare liniară și cele ale problemei extinse există o corespondență biunivocă.

Demonstrație. Fie $x^*[x_1^* x_2^* \ldots x_n^* \ldots x_{n+p}^*]$ o soluție optimă a problemei extinse și z^* valoarea funcției obiectiv, pentru această soluție. Vectorul $\bar{x}^*[x_1^* x_2^* \ldots x_n^*]$ este o soluție optimă pentru problema inițială și funcția obiectiv (I.1.5) ia valoarea $\bar{z}^* = z^*$. Pentru a dovedi aceasta să admitem că sistemul inițial are o soluție realizabilă de bază $\hat{x}[\hat{x}_1 \hat{x}_2 \ldots \hat{x}_n]$, pentru care funcția obiectiv ia valoarea $\hat{z} > \bar{z}^*$. În acest caz există valori nenegative $\hat{x}_{n+1}, \ldots, \hat{x}_{n+p}$,

astfel încît vectorul $\hat{\hat{x}}[\hat{x}_1\ \hat{x}_2 \ldots \hat{x}_n \ldots \hat{x}_{n+p}]$ să satisfacă sistemul de restricţii al problemei extinse. Fie $\hat{\hat{z}}$ valoarea funcţiei obiectiv pentru această soluţie. Deoarece $\hat{\hat{z}} = \hat{z}$, urmează că $\hat{\hat{z}} > z^*$, ceea ce contrazice ipoteza de optimalitate a soluţiei x^*.

Vom arăta cum se construieşte modelul unei probleme de programare liniară pe un exemplu simplificat de planificare a investiţiilor.

P r o b l e m ă. Planul de producţie al unei întreprinderi prevede o creştere care necesită utilări suplimentare. Să admitem că se discută creşterea producţiei unui anumit tip de laminate. Laminoarele care se instalează în acest scop trebuie să aibă o capacitate totală anuală de producţie de cel puţin Q tone. Pot fi luate în considerare patru tipuri de laminoare, pe care le vom nota cu T_1, T_2, T_3 şi T_4.

Se cunosc următoarele date tehnice:

1) capacitatea de producţie a fiecărui tip de laminor, în tone pe oră, notată cu q_i pentru $i = 1, \ldots, 4$;

2) investiţiile necesare pentru instalarea fiecărui tip de laminor, notate cu p_i pentru $i = 1, \ldots, 4$;

3) cheltuielile anuale de exploatare a laminoarelor, notate cu c_i pentru $i = 1, \ldots, 4$;

4) cheltuielile anuale de întreţinere a laminoarelor, notate cu s_i pentru $i = 1, \ldots, 4$.

Planul de investiţii poate fi considerat optim dacă:

a) totalul cheltuielilor anuale de exploatare şi întreţinere este minim, sau

b) totalul investiţiilor este minim, sau

c) totalul cheltuielilor de investiţii, exploatare şi întreţinere este minim.

Pentru construirea modelului notăm cu x_i numărul laminoarelor de tip $i = 1, \ldots, 4$ care trebuie instalate şi cu n_i numărul de ore din cursul unui an în care laminorul de tip i poate funcţiona.

Laminoarele instalate vor avea capacitatea totală anuală de producţie de cel puţin Q tone dacă este satisfăcută inecuaţia

$$\sum_{i=1}^{4} n_i q_i x_i \geqslant Q. \qquad (I.1.19)$$

Funcţia obiectiv depinde de criteriul de optimalitate.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul a) soluția optimă este aceea care minimizează funcția

$$f = \sum_{i=1}^{4} (c_i + s_i) x_i. \tag{I.1.20}$$

În cazul b) soluția optimă va minimiza funcția

$$F = \sum_{i=1}^{4} p_i \, x_i, \tag{I.1.21}$$

iar în cazul c) se cere determinarea minimului funcției

$$\Phi = \sum_{i=1}^{4} (p_i + c_i + s_i) x_i. \tag{I.1.22}$$

Așa cum s-a pus problema, sistemul de restricții s-a redus la o singură inecuație. Dacă se prevăd și alte condiții se pot adăuga noi relații între necunoscutele x_i. De exemplu, dacă spațiul disponibil pentru instalarea noilor laminoare nu îngăduie decît amplasarea a cel mult n laminoare, variabilele x_i vor satisface condiția

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \leqslant n. \tag{I.1.23}$$

Pe lîngă condițiile de nenegativitate a variabilelor, în cazul acestei probleme se mai cere ca valorile x_i să fie *numere întregi*. Rezolvarea problemelor de programare liniară în numere întregi necesită o tehnică specială.

Construirea modelului matematic al unei probleme de programare liniară cere o analiză amănunțită și o cercetare competentă a fenomenului economic studiat. Alegerea condițiilor esențiale în care trebuie încadrat procesul economic impune o strînsă colaborare între tehnicieni și economiști. Omiterea unor condiții importante, cum și încărcarea modelului cu restricții neesențiale conduc la rezultate inaplicabile în practică, deși sînt juste din punct de vedere matematic.

Un interes deosebit prezintă de asemenea și alegerea scopului urmărit în studiu — funcția obiectiv. De cele mai multe ori, aceluiași model i se pot atașa mai multe funcții obiectiv; din compararea rezultatelor obținute se pot desprinde concluzii utile în luarea hotărîrilor.

În construirea unui model bun rolul de seamă revine economistului, însă rezolvarea modelelor comportă metode care necesită o precizie matematică.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a exemplifica cele trei forme în care poate fi prezentat un model de programare liniară să admitem că restricţiile problemei şi funcţia obiectiv sînt următoarele:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\quad + 4x_5 &\leqslant 84 \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 &\leqslant 75 \\ 8x_1 \qquad\quad + 3x_4 \qquad\quad &\geqslant 20 \\ 7x_2 \qquad\quad + 3x_5 &\geqslant 32 \\ x_1 \quad + x_3 \qquad + x_5 &= 18 \\ x_i &\geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, 5, \end{aligned} \tag{I.1.24}$$

$$\max z = 1{,}20x_1 + 2{,}05x_2 + 0{,}95x_3 + 0{,}65x_4 + 0{,}50x_5. \tag{I.1.25}$$

Relaţiile (I.1.24) şi (I.1.25) constituie forma algebrică a modelului problemei. Notînd cu α_i vectorii-linie, avem:

$$\alpha_1(3, 2, 1, 0, 4); \quad \alpha_2(5, 5, 5, 2, 1); \quad \alpha_3(8, 0, 0, 3, 0);$$

$$\alpha_4(0, 7, 0, 0, 3) \quad \text{şi} \quad \alpha_5(1, 0, 1, 0, 1);$$

cu x vectorul activităţilor

$$x[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \text{ şi cu } c(1{,}20; 2{,}05; 0{,}95; 0{,}65; 0{,}50)$$

vectorul-cost, modelul se scrie vectorial astfel

$$\begin{aligned} \alpha_1 x &\leqslant 84 \\ \alpha_2 x &\leqslant 75 \\ \alpha_3 x &\geqslant 20 \\ \alpha_4 x &\geqslant 32 \\ \alpha_5 x &= 18 \\ x &\geqslant 0, \end{aligned} \tag{I.1.26}$$

$$\max z = cx. \tag{I.1.27}$$

Dacă se înmulţesc cu -1 inecuaţiile a treia şi a patra din (I.1.24) şi se notează cu A matricea coeficienţilor tehnici şi cu d vectorul-cerere, avem:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad d = \begin{bmatrix} 84 \\ 75 \\ -20 \\ -32 \\ 18 \end{bmatrix}. \tag{I.1.28}$$

Scanned with OKEN Scanner

Păstrînd aceleaşi notaţii pentru vectorul-activităţilor şi vectorul-cost, modelul scris sub forma matricială este

$$\begin{aligned} Ax &\leqslant d \\ x &\geqslant 0 \\ \max\ z &= cx, \end{aligned} \qquad \text{(I.1.29)}$$

în care A, d, c şi x au expresiile specificate mai înainte. Se poate verifica cu uşurinţă că vectorul $\bar{x}(7, 2, 4, 1, 7)$ satisface sistemul (I.1.24), deci constituie o soluţie a problemei. Această soluţie este în acelaşi timp o soluţie realizabilă de bază, deoarece numărul componentelor nenule ale vectorului activităţilor $\bar{x}$ este egal cu numărul restricţiilor şi toate componentele lui sînt nenegative. Vectorul $\bar{x}$ constituie deci un program de activitate. Pentru ca acest program să fie optim este necesar ca funcţia (I.1.25) să ia valoarea maximă pentru $\bar{x}$ pe mulţimea soluţiilor sistemului (I.1.24).

Vectorul $\bar{\bar{x}}$ (3 ; 0 ; 3 ; 6 ; 12) este o soluţie de bază degenerată, deoarece numărul componentelor nenule ale acestui vector este mai mic decît numărul restricţiilor ; $\tilde{x}(10 ; 5 ; 5 ; -14 ; 3)$ constituie o soluţie nerealizabilă, fiindcă are o componentă negativă, deci nu poate constitui un program.

Sistemul (I.1.24) poate fi scris sub forma standard adăugînd primelor două inecuaţii variabilele de abatere x_6 şi x_7 şi scăzînd din următoarele două inecuaţii variabilele x_8 şi x_9. Coeficienţii acestor variabile în funcţia obiectiv sînt nuli. Forma standard a modelului (I.1.24), (I.1.25) este

$$\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_5 + x_6 = 84 \\
&5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 75 \\
&8x_1 + 3x_4 - x_8 = 20 \\
&7x_2 + 3x_5 - x_9 = 32 \\
&x_1 + x_3 + x_5 = 18 \\
&x_i \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, 9
\end{aligned} \qquad \text{(I.1.30)}$$

$$\max z = 1{,}20x_1 + 2{,}05x_2 + 0{,}95x_3 + 0{,}65x_4 + 0{,}50x_5 + 0 \cdot x_6 + \qquad \text{(I.1.31)}$$

$$+ 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 + 0 \cdot x_9.$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. ALGORITMUL PRIMAL SIMPLEX

1. Criteriul de optimalitate al unei soluții de bază

Să considerăm problema de programare liniară dată sub forma standard:

$$Ax = d \tag{I.2.1}$$

$$x \geqslant 0 \tag{I.2.2}$$

$$\max\ z = cx.$$

Matricea A este $m \times n$ dimensională; x și c sînt vectori în R_n, spațiul activităților, iar d, vector în R_m, spațiul condițiilor. Vom admite că sînt satisfăcute condițiile

$$r(A) = r(A, d) \tag{I.2.3}$$

(unde s-a notat cu $r(A)$ rangul matricei A și cu $r(A, d)$ rangul matricei extinse prin adăugarea vectorului d), ceea ce implică compatibilitatea sistemului (I.2.1), și

$$r(A) = m, \tag{I.2.4}$$

ceea ce implică relația $m \leqslant n$. Condiția (I.2.4) este de obicei satisfăcută în problemele practice, deoarece, dacă $m > n$ și sistemul este compatibil, unele ecuații sînt combinații liniare ale celorlalte, deci pot fi omise, și astfel se ajunge la $m = n$. Dacă pentru $m = n$ sistemul admite o soluție, ea este unică, ceea ce exclude posibilitatea optimizării. Se deduce de aici că în problemele care prezintă interes pentru programarea liniară,

$$m < n. \tag{I.2.5}$$

Fie $a_j (j = 1, \ldots, n)$ vectorii-coloană ai matricei A. Orice mulțime de m vectori a_j liniar-independenți din A formează o submatrice nedegenerată, deci o *bază* B în spațiul R_m. Cele m variabile asociate vectorilor din B se numesc *variabile de bază*. Variabilele asociate celorlalți $n - m$ vectori-coloană ai matricei A se numesc *variabile secundare*. Notînd cu x^B și x^R subvectorii vectorului activităților x, ale căror componente sînt respectiv variabile de bază și variabile secundare, x poate fi scris sub forma:

$$x[x^B,\ x^R]. \tag{I.2.6}$$

Matricea A poate fi descompusă în două submatrice: B formată din m vectorii liniar independenţi $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_m})$ şi R formată din ceilalţi $n - m$ vectori coloană; avem:

$$A = (B,\ R). \tag{I.2.7}$$

Componentele vectorului „cost" c corespunzătoare variabilelor de bază constituie subvectorul care se va nota cu c^B, iar cele care corespund variabilelor secundare formează subvectorul c^R, astfel încît c se scrie:

$$c(c^B,\ c^R). \tag{I.2.8}$$

Cu aceste notaţii forma standard a problemei de programare liniară se scrie:

$$(B,\ R)[x^B,\ x^R] = d, \tag{I.2.9}$$

$$x^B \geqslant 0\,;\ x^R \geqslant 0$$

$$\max\ z = (c^B,\ c^R)\ [x^B,\ x^R] \tag{I.2.10}$$

sau, efectuînd produsele:

$$Bx^B + Rx^R = d,$$

$$x^B \geqslant 0\,;\ x^R \geqslant 0, \tag{I.2.11}$$

$$\max\ z = c^B\ x^B + c^R\ x^R. \tag{I.2.12}$$

Pentru a obţine o soluţie a sistemului (I.2.11) este suficient să înmulţim la stînga această ecuaţie matriceală cu B^{-1}, inversa matricei B, şi avem:

$$x^B = B^{-1}d - B^{-1}R\ x^R. \tag{I.2.13}$$

Dacă în (I.2.13) se ia $x^R = 0$ se obţine o soluţie de bază pentru (I.2.11), deci şi pentru (I.2.1), şi anume:

$$\bar{x}^B = B^{-1}\,d, \tag{I.2.14}$$

care este o soluţie de bază realizabilă dacă $\bar{x}^B$ are toate componentele nenegative. Valoarea funcţiei obiectiv pentru această soluţie este

$$\bar{z} = c^B\bar{x}^B = c^B\ B^{-1}\,d. \tag{I.2.15}$$

Pentru simplificarea scrierii notăm cu $N = \{1, \ldots, n\}$ mulţimea indicilor vectorilor-coloană ai matricei A cu $I = \{j_1, \ldots, j_m\}$ mulţimea indicilor vectorilor-coloană ai bazei B cu $J = N - I$ mulţimea

Scanned with OKEN Scanner

indicilor vectorilor-coloană ai submatricei R și cu $M = \{1, \ldots, m\}$. mulțimea indicilor vectorilor-linie ai matricei A.

Cu aceste notații se poate scrie:

$$B^{-1} d = \bar{x}^B = (\bar{x}_s) ; \qquad s \in I, \tag{I.2.16}$$

$$B^{-1} R = G = (g_j) ; \qquad j \in J. \tag{I.2.17}$$

Din relația (I.2.17), prin înmulțire la stînga cu matricea B se găsește expresia vectorilor atașați variabilelor secundare $a_j (j \in J)$ în funcție de vectorii bazei. Avem $B\,B^{-1}R = BG$ și deoarece $BB^{-1} = E$, matricea unitate, vectorii $a_j (j \in J)$ ai matricei R sînt dați de expresia

$$a_j = Bg_j = \sum_{s \in I} g_{sj}\, a_s ; \qquad j \in J. \tag{I.2.18}$$

Egalitatea (I.2.13) exprimă explicit variabilele de bază în funcție de variabilele secundare. Sub forma algebrică această egalitate se scrie astfel:

$$x_s = \bar{x}_s^B - \sum_{j \in J} g_{sj}\, x_j ; \qquad s \in I. \tag{I.2.19}$$

Expresia algebrică a funcției obiectiv (I.2.12), cu aceste notații, este:

$$z = \sum_{s \in I} c_s\, x_s + \sum_{j \in J} c_j\, x_j. \tag{I.2.20}$$

Pentru a exprima funcția obiectiv numai cu ajutorul variabilelor secundare se înmulțește (I.2.19) cu c_s, se însumează pe $s \in I$ și se adună cu (I.2.20), astfel:

$$\sum_{s \in I} c_s\, x_s + z = \sum_{s \in I} c_s\, \bar{x}_s^B - \sum_{s \in I} c_s \sum_{j \in J} g_{sj}\, x_j + \sum_{s \in I} c_s\, x_s + \sum_{j \in J} c_j\, x_j ; \tag{I.2.21}$$

în (I.2.21) se reduc termenii $\sum_{s \in I} c_s\, x_s$, se înlocuiește $\sum_{s \in I} c_s\, \bar{x}_s^B = \bar{z}$ și avem

$$z = \bar{z} - \sum_{j \in J} x_j \Big(\sum_{s \in I} c_s\, g_{sj} - c_j \Big).$$

Notînd

$$z_j = \sum_{s \in I} c_s\, g_{sj}, \tag{I.2.22}$$

Scanned with OKEN Scanner

egalitatea precedentă se scrie:

$$z = \bar{z} - \sum_{j \in J} x_j (z_j - c_j). \tag{I.2.23}$$

Din (I.2.23) se vor deduce condiţiile de optimalitate a soluţiei $\bar{x}^B$. Această soluţie este optimă dacă funcţia obiectiv ia valoarea maximă pe mulţimea soluţiilor realizabile pentru $x = \bar{x}^B$, adică dacă $\bar{z} > z$ pentru orice $x_j \geqslant 0$; $j \in J$.

Din (I.2.23) se deduce că această condiţie este îndeplinită dacă

$$z_j - c_j \geqslant 0 \text{ pentru toţi } j \in J. \tag{I.2.24}$$

Deci, relaţia (I.2.24) constituie *criteriul de optimalitate al unei* soluţii de bază.

Pentru fixarea notaţiilor şi noţiunilor introduse să considerăm:

Exemplul I. Fie dată o problemă de programare liniară sub forma:

$$\begin{aligned} -x_1 - 5/2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= -3 \\ 6x_1 - 10x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 &= 21 \\ x_i \geqslant 0 \qquad & i = 1, \ldots, 5, \end{aligned} \tag{I.2.25}$$

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5. \tag{I.2.26}$$

Matricea sistemului de restricţii (I.2.25) este

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -5/2 & 7 & -5 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & -5 \\ 6 & -10 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

iar matricea (A, d) este

$$(A, d) = \begin{bmatrix} -1 & -5/2 & 7 & -5 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & -5 & -3 \\ 6 & -10 & 4 & 1 & 1 & 21 \end{bmatrix}.$$

Se observă cu uşurinţă că $r(A) = r(A, d)$ şi că $r(A) = 3$, vectorii a_2, a_3, a_4 din A sînt liniar independenţi, deci o bază a spaţiului condiţiilor, care în acest exemplu este R_3, este formată din aceşti vectori. Notînd

$$B = (a_2, a_3, a_4) = \begin{bmatrix} -5/2 & 7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \\ -10 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \text{ avem } |B| = -\frac{123}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Variabilele x_2, x_3 şi x_4 sînt variabile de bază, iar x_1 şi x_5 variabile secundare, deci x^B este format din (x_2, x_3, x_4) şi x^R din (x_1, x_5). Sistemul (I.2.25) se scrie matriceal sub forma

$$\begin{bmatrix} -5/2 & 7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \\ -10 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 21 \end{bmatrix}, \quad \text{(I.2.27)}$$

în care sînt puse în evidenţă variabilele de bază şi cele secundare. Vectorul cost $c(4, 3, -1, 2, -3)$ se descompune în vectorii $c^B(3, -1, 2)$ şi $c^R(4, -3)$. În acest caz, funcţionala liniară (I.2.26) se scrie

$$z = (3, -1, 2) \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + (4, -3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}. \quad \text{(I.2.28)}$$

Inversa matricei B este

$$B^{-1} = -\frac{2}{123} \begin{bmatrix} -5 & -27 & 2 \\ -12 & -105/2 & -15/2 \\ -2 & -60 & -23/2 \end{bmatrix}.$$

Înmulţind la stînga ecuaţia (I.2.27) cu B^{-1} avem sistemul condiţiilor explicitat în raport cu variabilele de bază:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{123} \begin{bmatrix} -37 & 117 \\ 138 & 207 \\ -187 & 561/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Luînd vectorul x^R egal cu zero, găsim soluţia de bază:

$$\bar{x}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

care este o soluţie degenerată şi nerealizabilă, deoarece are o componentă nulă şi una negativă. Dacă se ia ca bază a spaţiului R_3 matricea $B_*(a_1, a_4, a_5)$ avem:

$$B_* = (a_1, a_4, a_5) = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad |B_*| = 138; \quad B_*^{-1} = \frac{1}{138} \begin{bmatrix} 6 & 9 & 21 \\ -32 & -25 & 3 \\ -4 & -29 & 9 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

și sistemul (I.2.27) explicitat în raport cu noile variabile de bază este:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{138} \begin{bmatrix} -207 & 117 \\ 0 & -187 \\ -138 & 37 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \qquad \text{(I.2.29)}$$

Pentru vectorul $(x_2, x_3) = 0$ se obține soluția realizabilă de bază:

$$\bar{x}^{B*} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

În acest exemplu avem $N = 1, 2, \ldots, 5$; pentru B mulțimea $I = \{1, 4, 5\}$ și $J = \{2, 3\}$.

$$G = \frac{1}{138} \begin{bmatrix} -207 & 117 \\ 0 & -187 \\ -138 & 37 \end{bmatrix} = (g_j); \quad j \in J.$$

Pentru B_* subvectorii lui c sînt $c^{B*}(4, 2, -3)$; $c^{R*}(3, -1)$ și valoarea funcției obiectiv este

$$\bar{z}^* = c^{B*}\ \bar{x}^{B*} = (4, 2, -3)\ [3, 1, 2] = 8.$$

Pentru a stabili optimalitatea soluției calculăm:

$$z_2 - c_2 = 4 \cdot \frac{-207}{138} + 2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{-138}{138} - 3 = -6,$$

$$z_3 - c_3 = 4 \cdot \frac{117}{138} + 2 \cdot \frac{-187}{138} - 3 \cdot \frac{37}{138} + 1 = \frac{121}{138}.$$

Diferența $z_2 - c_2$ fiind negativă soluția $\bar{x}^{B*}$ nu este optimă.

2. Formule de schimbare a bazei

Teorema I. Într-o problemă de programare liniară, funcția obiectiv ia valoarea optimă, pe mulțimea soluțiilor realizabile a sistemului restricțiilor, pentru o soluție realizabilă de bază.

Demonstrație. Pentru a dovedi această afirmație să admitem că $\bar{x}^B$ este o soluție realizabilă de bază pentru care funcția obiectiv ia cea mai mare valoare $\bar{z}$ care poate fi atinsă pe mulțimea soluțiilor.

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz sînt îndeplinite condițiile (I.2.24). Fie $\bar{x}_k > 0$; $k \in J$ astfel determinat, încît să avem

$$\bar{\bar{x}}_s = \bar{x}_s^B - g_{sk}\bar{x}_k > 0 \text{ pentru toți } s \in I. \tag{I.2.30}$$

Vectorul cu componentele $(\bar{\bar{x}}_s, \bar{x}_k)$, $s \in I$ este o soluție realizabilă a sistemului condițiilor cu $(m+1)$ componente nenule. Valoarea funcției obiectiv pentru această soluție este

$$\bar{\bar{z}} = \bar{z} - x_k(z_k - c_k); \; k \in J. \tag{I.2.31}$$

Deoarece $z_k - c_k > 0$, conform condiției de optimalitate a soluției $\bar{x}^B$, iar $x_k > 0$, rezultă că $\bar{\bar{z}} < \bar{z}$, adică funcția obiectiv ia o valoare mai mică pentru orice soluție realizabilă cu mai mult de m componente nenule, ceea ce dovedește teorema enunțată. Importanța acestei teoreme constă în aceea că, pentru determinarea soluției optime, cercetarea se limitează la mulțimea soluțiilor realizabile de bază. Această mulțime este finită și cel mult egală cu mulțimea bazelor care pot fi formate din matricea $m \times n$ dimensională A. În adevăr, numărul maxim de baze care pot fi formate din vectorii matricei A este egal cu C_n^m. Dacă pentru fiecare dintre aceste baze soluția corespunzătoare $\bar{x}^B$ are toate componentele nenegative, C_n^m este numărul maxim al soluțiilor realizabile de bază. Rămîne să găsim răspunsul la următoarea întrebare: dacă dispunem de o soluție realizabilă de bază care nu îndeplinește condițiile de optimalitate, cum se poate determina o altă *soluție realizabilă de bază îmbunătățită*, adică pentru care funcția obiectiv să ia o valoare mai mare? Pentru a răspunde la această întrebare să considerăm baza B formată din vectorii a_s; $s \in I$, căreia îi corespunde soluția $\bar{x}^B$ dată de (I.2.14). Pentru $\bar{x}^B$ funcția obiectiv ia valoarea $\bar{z}$ din (I.2.15). Dacă $\bar{x}^B$ nu este soluția optimă, există diferențe $z_j - c_j < 0$ pentru $j \in J$.

Expresiile vectorilor a_j; $j \in J$ în funcție de vectorii bazei sînt date de (I.2.18).

Vectorul a_j poate înlocui un vector a_k din B dacă și numai dacă $g_{kj} \neq 0$. Îndeplinind această condiție, relația (I.2.18) devine:

$$a_k = \frac{1}{g_{kj}} a_j - \sum_{\substack{s \in I \\ s \neq k}} \frac{g_{sj}}{g_{kj}} a_s \tag{I.2.32}$$

Dacă se înlocuiește a_k în relația (I.2.14) scrisă sub forma

$$B\bar{x}^B = d \quad \text{sau} \quad \sum_{s \in I} a_s x_s = d, \tag{I.2.33}$$

se obține

$$\sum_{\substack{s\in I\\ s\neq k}} a_s\, x_s + \left(\frac{1}{g_{kj}}\, a_j - \sum_{\substack{s\in I\\ s\neq k}} \frac{g_{sj}}{g_{kj}}\, a_s\right) x_k = d \qquad \text{(I.2.34)}$$

sau

$$\sum_{\substack{s\in I\\ s\neq k}} \left(x_s - \frac{g_{sj}}{g_{kj}}\, x_k\right) a_s + \frac{1}{g_{kj}}\, x_k\, a_j = d. \qquad \text{(I.2.35)}$$

Soluția corespunzătoare bazei obținute înlocuind în B vectorul a_k cu a_j; $j \in J$, este

$$x'_s = x_s - \frac{g_{sj}}{g_{kj}}\, x_k \;;\; s \in I \quad \text{și} \quad s \neq k, \qquad \text{(I.2.36)}$$

$$x'_j = \frac{1}{g_{kj}}\, x_j. \qquad \text{(I.2.37)}$$

Aceste valori constituie o soluție realizabilă de bază: dacă $x'_s \geqslant 0$, adică $\frac{x_k}{g_{kj}} \leqslant \frac{x_s}{g_{sj}}$ pentru toți $s \in I$ și $x'_j \geqslant 0$, adică $g_{kj} > 0$

sau, ceea ce este același lucru, dacă este îndeplinită condiția

$$\frac{x_k}{g_{kj}} = \min_{s\in I} \left\{\frac{x_s}{g_{sj}},\; g_{sj} > 0\right\} \neq 0. \qquad \text{(I.2.38)}$$

Relația (I.2.38) constituie *criteriul de ieșire din bază* a unui vector a_k.

În rezumat, vectorul $a_k \in B$ poate fi înlocuit cu un vector $a_j \in R$, astfel ca soluția corespunzătoare noii baze să fie realizabilă dacă:

1) vectorul a_j are componente pozitive g_{sj} pentru $s \in I$;

2) raportul $\frac{x_k}{g_{kj}}$ este cel mai mic dintre rapoartele formate din componentele vectorului-soluție și componentele pozitive ale vectorului candidat la intrarea în bază.

Din relația (I.2.23) se deduce cu ușurință că baza obținută înlocuind vectorul a_k cu a_j corespunde unei soluții pentru care funcția obiectiv ia o valoare mai mare dacă $z_j - c_j < 0$.

În concluzie, *criteriul de intrare în bază* a unui vector a_j este ca acestui vector să-i corespundă diferența $z_j - c_j < 0$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Soluții nemărginite și soluții optime alternative

După cum s-a arătat, criteriul de optimalitate a soluției $\bar{x}^B$, corespunzătoare bazei $B = (a_s)$; $s \in I$, este ca $z_j - c_j \geqslant 0$ pentru toți $j \in J$. Dacă există o diferență $z_j - c_j < 0$ și vectorul a_j; $j \in J$ are componente pozitive, soluția poate fi îmbunătățită.

Să vedem ce se întîmplă în următoarele cazuri:

1) există o singură diferență $z_l - c_l < 0$; $l \in J$ și toate componentele g_{sl} ale vectorului a_l în baza B sînt negative;

2) există mai multe diferențe $z_j - c_j < 0$ și fie $J_1 \subset J$ mulțimea vectorilor a_j; $j \in J_1$ care îndeplinesc această condiție și au componente nenegative în baza B;

3) unele diferențe $z_j - c_j = 0$; $j \in J$.

Să presupunem că este îndeplinită ipoteza 1) și că vectorul a_l intră în bază înlocuind vectorul a_k pentru care:

$$\frac{x_k}{g_{kl}} = \min_{s \in I} \left\{ \frac{x_s}{g_{sl}} \right\} = \theta.$$

Deoarece $g_{sl} < 0$, $\theta < 0$ și toți x'_s dați de formulele (I.2.36) sînt pozitivi pentru orice $x_k > 0$, deci există soluții realizabile în care $m + 1$ variabile pot fi nenule. Valoarea funcției obiectiv

$$\bar{\bar{z}} = \bar{z} - x_l (z_l - c_l)$$

poate deveni oricît de mare, deoarece x_l poate lua orice valoare pozitivă. *Problema are soluții nemărginite și nu admite un optim finit.*

Exemplul II. În exemplul precedent soluția x^{B*} nu este optimă, deoarece diferența $z_2 - c_2$ este negativă, deci vectorul a_2 ar trebui să intre în bază pentru obținerea unei soluții îmbunătățite. Vectorul a_2 are însă numai componente nepozitive în baza B^*, deci dînd lui x_2 orice valoare nenegativă se găsește o soluție cu patru componente nenule pentru care funcția obiectiv ia o valoare mai mare decît $\bar{z}^*$. Din (I.2.29) se vede că, luînd $x_2 = 138$ și $x_3 = 0$, găsim valorile

$$x_1 = 210; \quad x_2 = 138; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 1; \quad x_5 = 140,$$

care verifică sistemul de restricții (I.2.25) și dă pentru funcția obiectiv valoarea $Z = 1096$. Deoarece pentru orice valoare pozitivă a variabilei x_2 valorile pe care le iau x_1, x_4 și x_5 sînt pozitive, problema admite soluții nemărginite și nu are o soluție optimă finită.

Să presupunem acum că este îndeplinită ipoteza 2). Se pune întrebarea: care dintre vectorii a_j; $j \in J_1$ corespunzători diferențelor $z_j - c_j < 0$ trebuie să intre în bază? Teoretic oricare dintre acești

Scanned with OKEN Scanner

vectori, intrînd în bază, conduce la o soluție îmbunătățită, deci alegerea vectorului nu este determinată. Practic însă este de preferat să se introducă în bază vectorul care corespunde diferenței $z_j - c_j$ cu valoarea absolută maximă, deoarece se asigură astfel cea mai mare creștere a valorii funcției obiectiv, așa cum rezultă din relația (I.2.31).

Să presupunem, în sfîrșit, că ne găsim în situația 3). Fie a_p un vector care nu aparține bazei B și căruia îi corespunde $z_p - c_p = 0$. Dacă acest vector are componente pozitive în B se determină prin criteriul de ieșire din bază vectorul a_k care trebuie înlocuit și se obține noua soluție realizabilă de bază. Valoarea funcției obiectiv pentru această soluție rămîne egală cu valoarea luată pentru soluția anterioară, așa cum se vede din (I.2.31), în care $z_k - c_k = z_p - c_p = 0$. Se spune că în acest caz problema admite soluții *optime alternate*.

Exemplul III. Dacă în exemplul I vectorul $a_2[-5/2, 2, -10]$ se înlocuiește cu $a_2'[-5/2, 2, 22/7]$ se calculează

$$g_2' = B_*^{-1}a_2' = \frac{1}{138}\begin{bmatrix} 6 & 9 & 21 \\ -32 & -25 & 3 \\ 4 & -29 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5/2 \\ 2 \\ 22/7 \end{bmatrix} = \frac{1}{138}\begin{bmatrix} 69 \\ 276/7 \\ -138/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/7 \\ -1/7 \end{bmatrix},$$

$$z_2' - c_2 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{7} - 3\left(-\frac{1}{7}\right) - 3 = 0.$$

Celelalte mărimi rămîn neschimbate, astfel că $x = [3, 0, 0, 1, 2]$ constituie un program al problemei modificate pentru care avem $z_2' - c_2 = 0$ și $z_3 - c_3 > 0$, deci un program optim.

Dacă vrem să introducem în bază vectorul a_2' calculăm rapoartele $\frac{x_s}{g_{sj}}$ pentru $s = \{1, 4, 5\}$ și $g_{sj} > 0$; astfel:

$$\frac{x_1}{g_{12}'} = \frac{3}{\frac{1}{2}}; \quad \frac{x_4}{g_{42}'} = \frac{1}{\frac{2}{7}}.$$

Raportul minim este $\frac{x_4}{g_{42}'}$, deci vectorul a_2' înlocuiește pe a_4 în B_*.

Noua bază este

$$B_{**} = (a_1 a_2' a_5) = \begin{bmatrix} -1 & -5/2 & 4 \\ 2 & 2 & -5 \\ 6 & 22/7 & 1 \end{bmatrix} \text{ și } B_{**}^{-1} = \frac{7}{276}\begin{bmatrix} 124/7 & 211/14 & 9/2 \\ -32 & -25 & 3 \\ -40/7 & -83/7 & 3 \end{bmatrix},$$

Scanned with OKEN Scanner

și noua soluție este

$$\bar{x}^{B_{**}} = B_{**}^{-1}\, d = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 7/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}.$$

Valoarea funcției obiectiv pentru această soluție este dată de relația

$$\bar{z}^{**} = c^{B_{**}} \cdot \bar{x}^{B_{**}} = (4,\ 3,\ -3) \begin{bmatrix} 5/4 \\ 7/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} = 8,$$

deci $\bar{z}^{*} = \bar{z}^{**}$

Teorema II. O problemă de programare liniară care admite $r > 1$ *soluții optime alternative admite o infinitate de soluții optime, care sînt combinații liniare convexe ale acestora.*

Demonstrație. Să admitem că problema de programare liniară dată sub forma standard (I.2.1), (I.2.2) admite r soluții de bază optime, pe care le notăm cu $\bar{x}^{(i)}$; $i = 1, \ldots, r$. Pentru aceste soluții funcția obiectiv ia aceeași valoare

$$z_{\max} = c\bar{x}^{(i)}; \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Fie $\bar{x} = \sum_{i=1}^{x} \lambda_i\, \bar{x}^{(i)}$, în care $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$ este o combinație liniară convexă a acestor soluții. Să arătăm că funcția obiectiv ia valoarea $z_{\max}$ și pentru $x = \bar{x}$. În adevăr, avem

$$z = c\bar{x} = c\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^{(i)} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i c\bar{x}^{(i)} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_{\max} = z_{\max} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = z_{\max},$$

ceea ce dovedește proprietatea enunțată.

Exemplul IV. Problema din exemplul III are soluțiile optime: $x^{(1)} = [3,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2]$ și $x^{(2)} = [5/4,\ 7/2,\ 0,\ 0,\ 5/2]$, pentru care funcția obiectiv ia valoarea $z = 8$.

Orice vector $x = \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}$ cu $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ este soluție optimă a aceleiași probleme. De exemplu, pentru $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 2/3$ avem soluția $x = (11/6;\ 7/3;\ 0;\ 1/3;\ 7/3)$ pentru care găsim $z = cx = (4,\ 3,\ -1,\ 2,\ -3)\ [11/6;\ 7/3;\ 0;\ 1/3;\ 7/3] = 8$.

Din rezultatele obținute pînă acum se poate construi:

Scanned with OKEN Scanner

4. Algoritmul simplex primal

Acest algoritm pleacă de la ipoteza că se cunoaşte o soluţie iniţială de bază a problemei de programare liniară şi oferă posibilitatea:

a) de a îmbunătăţi soluţia, înlocuind în fiecare iteraţie cîte un singur vector din bază, pînă la obţinerea soluţiei optime, sau

b) de a dovedi că nu există soluţie optimă.

Într-o problemă de *maxim*, fie $\overline{x}^B = (\overline{x}_s) = B^{-1}\, d$ soluţia iniţială de bază asociată bazei B, I mulţimea vectorilor din B şi $J = N - I$ mulţimea vectorilor matricei A care nu aparţine lui B. Algoritmul simplex primal constă din aplicarea următoarelor reguli:

1. Se calculează matricea

$$G = (g_j) = (g_{sj}) = B^{-1}R$$

şi diferenţele

$$z_j - c_j = \sum_{s \in I} c_s\, g_{sj} - c_j, \text{ pentru } j \in J.$$

2. Se cercetează semnele diferenţelor $z_j - c_j$; $j \in J$. Pot exista următoarele cazuri:

a. Pentru toţi $j \in J$; $z_j - c_j \geqslant 0$. În acest caz, programul $\overline{x}^B$ este optim.

b. Există $z_j - c_j < 0$ pentru $j \in J_1 \subset J$. În acest caz se trece la punctul următor.

3. Se studiază componentele vectorilor $g_j = B^{-1}a_j$; $j \in J_1$. Pot exista următoarele situaţii:

a. Există cel puţin un vector $g_j \leqslant 0$, $j \in J_1$ şi atunci problema are soluţii nemărginite, deci nu admite un maxim finit.

b. Pentru toţi $j \in J_1$ vectorii g_j au componente pozitive. În acest caz se determină vectorul a_l prin condiţia

$$|z_l - c_l| = \max_{j \in J_1} |z_j - c_j|, \textit{ criteriul de intrare în bază,}$$

şi vectorul a_k prin condiţia

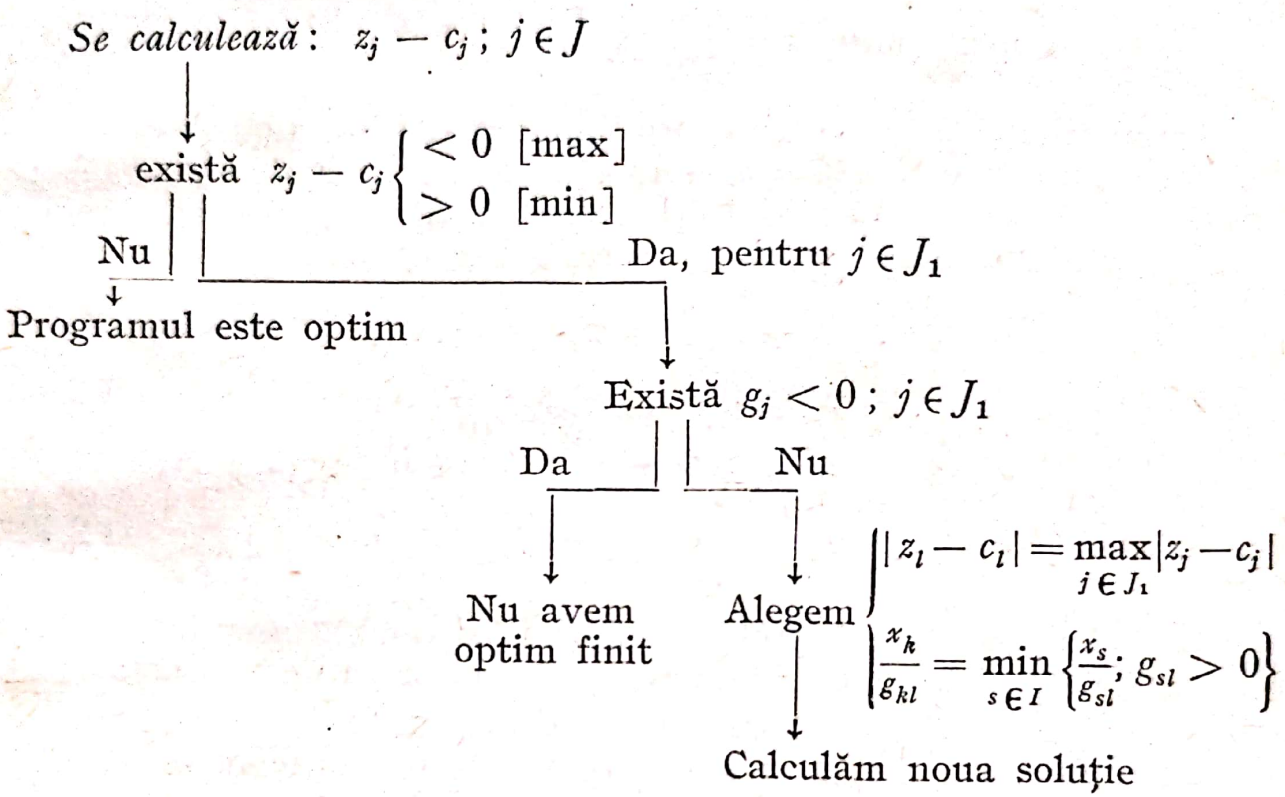
$$\frac{x_k}{g_{kl}} = \min_{s \in I} \left\{ \frac{x_s}{g_{sl}} \; ; \; g_{sl} > 0 \right\}, \textit{ criteriul de ieşire din bază.}$$

4. Se formează o nouă bază B^* înlocuind în B vectorul a_k prin vectorul a_l şi se calculează soluţia corespunzătoare acestei baze. Se aplică din nou acelaşi algoritm pînă se ajunge la soluţia optimă

Scanned with OKEN Scanner

sau se dovedește că nu există optim finit. Deoarece $\max z = -\min(-z)$, același algoritm oferă posibilitatea determinării soluțiilor optime și în problemele de minim.

Prezentarea schematică a algoritmului simplex



5. Determinarea unei soluții de bază și aplicarea algoritmului simplex primal.

Algoritmul simplex primal consideră cunoscută o soluție realizabilă de bază a sistemului de restricții. Dacă acest sistem este dat sau adus la forma standard prin adăugarea unor variabile, oricărei baze B îi corespunde o soluție de bază, dar această soluție nu este realizabilă decît dacă $\bar{x}^B = B^{-1} d > 0$.

Dificultățile de a calcula inversa unei matrice și incertitudinea obținerii unei soluții realizabile corespunzătoare unei baze luate la întîmplare, contribuie ca această metodă să nu fie practică. Pentru o prezentare cît mai sistematică a metodelor de determinare a soluției inițiale se vor trata cazurile în care transformarea sistemului de inecuații în sistem de ecuații necesită numai folosirea variabilelor de abatere sau a variabilelor artificiale, precum și unele cazuri particulare.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul include numai variabile de abatere. Fie dată o problemă de programare liniară sub forma

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leqslant di\,; \qquad i \in M,$$
$$x_j \geqslant 0\,; \qquad j \in N\,; \tag{I.2.39}$$

$$\max\ [\min]\ z = \sum_{j \in N} c_j x_j. \tag{I.2.40}$$

Inecuațiile (I.2.39) se transformă în ecuații prin adăugarea variabilelor nenegative x_j; $j = n+1, \ldots, n+m$, numite *variabile de abatere*, care reprezintă activități fictive, deci li se atașază costuri nule. Problema transformată se scrie astfel:

$$\sum a_{ij} x_j + x_{n+i} = d_i\,; \qquad i \in M,$$
$$x_j \geqslant 0 \qquad\quad ; \qquad j \in N, \tag{I.2.41}$$
$$x_{n+i} \geqslant 0 \qquad ; \qquad i \in M\,;$$

$$\max\ [\min]\ z = \sum_{j \in N} c_j x_j + \sum_{i \in M} 0\, x_{n+i}. \tag{I.2.42}$$

În § 1 s-a arătat că problema inițială și cea extinsă sînt echivalente. Matricea sistemului (I.2.41) se formează atașînd matricei A a sistemului (I.2.39) o matrice unitate $E^{(m)}$ de ordinul m. Soluția evidentă $x_j = 0$; $j \in N$, $x_{n+i} = d_i$; $i \in M$ este o soluție realizabilă de bază, corespunzătoare bazei $B = E^{(m)}$, dacă $d_i \geqslant 0$ pentru toți $i = 1, \ldots, m$. Dacă există $d_i < 0$, inecuația corespunzătoare înmulțită cu -1 are semnul „$\geqslant$". Acest caz va fi studiat ulterior.

Exemplul V. Să se determine

$$\max\ z = 4x_1 - x_2 + 3x_3 \tag{I.2.43}$$

pe mulțimea soluțiilor nenegative ale sistemului

$$4x_1 - x_2 - 6x_3 \leqslant 4,$$
$$x_1 - x_2 + 5x_3 \leqslant 3. \tag{I.2.44}$$

Soluție. Se adaugă în membrul stîng al inecuațiilor sistemului (I.2.44) variabilele de abatere nenegative x_4 și x_5 și se obține sistemul

$$4x_1 - x_2 - 6x_3 + x_4 \qquad = 4,$$
$$x_1 - x_2 + 5x_3 \qquad + x_5 = 3. \tag{I.2.45}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru care $x_4 = 4$; $x_5 = 3$ este o soluţie realizabilă de bază corespunzătoare bazei

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vectorii a_1, a_2, a_3 şi d în baza B au aceleaşi componente ca în sistemul dat. Sistemul explicitat în raport cu variabilele de bază se poate scrie schematic sub următoarea formă, care constituie în acelaşi timp şi iteraţia 0 a algoritmului simplex.

Iteraţia 0

(1)

c_B ↓	c_j ⟶		0	0	4	−1	3
	Baza	d	a_4	a_5	a_1	a_2	a_3
0	a_4	4	1	0	4*	1	−6
0	a_5	3	0	1	1	1	5
	$z_j - c_j$	0	0	0	−4	1	−3

În linia $z_j - c_j$ există valori negative (corespunzătoare vectorilor care nu aparţin bazei), deci soluţia nu este optimă.

Vectorii a_1 şi a_3 corespunzători diferenţelor $z_j - c_j < 0$ au componente pozitive, deci problema admite soluţii optime. Se determină vectorul care trebuie să intre în bază pentru îmbunătăţirea soluţiei prin condiţia

$$|z_l - c_l| = \max_{j \in J_1} |z_j - c_j| = \max |-4, -3| = 4,$$

care arată că vectorul indicat este a_1. Se stabileşte care vector al bazei trebuie înlocuit prin condiţia

$$\frac{x_k}{g_{kl}} = \min_{s \in I} \left\{ \frac{x_s}{g_{sl}} ; g_{sl} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{4}{4} ; \frac{3}{1} \right\} = \frac{4}{4},$$

din care rezultă că se elimină din bază vectorul a_4. Elementul 4, situat la intersecţia liniei a_4 şi coloanei a_1, se numeşte *pivot* sau *element de soluţie*.

Scanned with OKEN Scanner

Se calculează componentele vectorului d în noua bază cu formulele (I.2.36) şi (I.2.37), în care $j = 1$ scriind formula (I.2.36) sub forma

$$x_s' = \frac{x_s g_{kj} - x_k g_{sj}}{g_{kj}}, \qquad \text{(I.2.46)}$$

din care se deduce următoarea regulă practică aplicabilă pentru calculul tuturor elementelor noului tabel:

Orice element care nu este situat pe linia pivotului se înlocuieşte cu valoarea unui determinant de ordinul II, împărţită prin pivot. Determinantul în (I.2.46) este

$$\delta = \begin{vmatrix} x_s & g_{sj} \\ x_k & g_{kj} \end{vmatrix}.$$

Diagonala principală este formată din elementul care se recalculează (x_s) şi pivot (g_{kl}), iar diagonala secundară, din elementele situate la intersecţiile liniilor şi coloanelor în care sînt situate pivotul şi elementul x_s. Se verifică cu uşurinţă că această regulă de calcul se aplică şi valorilor din linia $z_j - c_j$.

Elementele situate pe linia pivot se înlocuiesc cu rapoartele dintre elementele acestei linii şi pivot. În acest fel se construieşte

Iteraţia 1

(2)

c_B	c		0	0	4	−1	3
	Baza	d	a_4	a_5	a_1	a_2	a_3
4	$\rightarrow a_1$	1	1/4	0	1	1/4	−3/2
0	$\leftarrow a_5$	2	−1/4	1	0	3/4	13/2*
	$z_j - c_j$	4	1	0	0	−2	−9

Din tabelul acestei iteraţii rezultă că soluţia se îmbunătăţeşte dacă vectorul a_3 înlocuieşte pe a_5 în bază. Astfel obţinem

Scanned with OKEN Scanner

Iteraţia 2

(3)

c_B ↓	$c_j \longrightarrow$		0	0	4	−1	3
	Baza	d	a_4	a_5	a_1	a_2	a_3
4	a_1	19/13	5/26	3/13	1	11/26	0
3	a_3	4/13	−1/26	2/13	0	3/26	1
	$z_j - c_j$	88/13	17/13	18/13	0	69/13	0

În tabelul iteraţiei 3 sînt îndeplinite condiţiile de optimalitate a soluţiei, deci programul optim este dat de vectorul $\bar{x}(19/13\,;\ 0\,;\ 4/13)$ pentru care funcţia obiectiv ia valoarea $z = 88/13$.

Sistemul include numai variabile artificiale. Problema de programare liniară se dă sub forma

$$\sum_{j \in N} a_{ij}\, x_j \geqslant d_i\,; \quad i \in M, \tag{I:2.47}$$

$$x_j \geqslant 0$$

$$\max\ [\min]\ z = \sum_{j \in N} c_j\, x_j. \tag{I.2.48}$$

Deoarece inecuaţiile din sistemul (I.2.47) au semnul $\geqslant$, extinderea sistemului prin adăugarea unor mărimi pozitive, pe care le vom numi *variabile artificiale*, poate transforma relaţiile în egalităţi, dar o soluţie care include valori nenule ale acestor variabile nu satisface restricţiile iniţiale. În cazul precedent s-a văzut că dispunînd de o matrice unitate $E^{(m)}$ se obţine cu uşurinţă un program iniţial; din această cauză se foloseşte aceeaşi metodă şi în cazul care se discută. Pentru a asigura excluderea variabilelor artificiale din soluţia optimă se ataşază acestor variabile, în funcţia obiectiv, *costuri de penalizare* care, în valoare absolută, pot fi oricît de mari. Dacă problema cere maximizarea funcţiei obiectiv, costurile de penalizare sînt negative; dacă se rezolvă o problemă de minim, aceste costuri sînt pozitive.

Scanned with OKEN Scanner

Metoda penalizării. Metoda de rezolvare a problemelor de programare liniară scrise sub forma

$$\sum_{j\in N} a_{ij}\, x_j + x_{n+i} - x'_{n+i} = d_i\,; \quad i\in M,$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad ; \quad j\in N, \tag{I.2.49}$$

$$x'_{n+i},\, x_{n+i} \geqslant 0 \qquad ; \quad i\in M\,;$$

$$\max\ [\min]\ z = \sum_{j\in N} c_j\, x_j \mp \sum_{i\in M} k_i\, x_{n+i} \tag{I.2.50}$$

se numește metoda penalizării. Aplicarea algoritmului simplex poate conduce la următoarele rezultate:

a) după un număr de iterații variabilele artificiale se elimină din bază și se obține un program al problemei inițiale;

b) după un număr de iterații baza conține variabile artificiale cu valoare nulă în acest caz, soluția din această iterație este un program degenerat al problemei inițiale, program care se poate îmbunătăți atîta timp cît mai sînt $z_j - c_j < 0$ în problemele de maxim sau $z_j - c_j > 0$ în cele de minim;

c) după un număr de iterații toate diferențele $z_j - c_j$ pentru $j\in J$ satisfac criteriul de optimalitate, dar baza mai conține variabile artificiale nenule; în acest caz problema inițială nu are soluție optimă.

O variantă a metodei penalizării. Metoda penalizării se poate aplica fără a introduce un număr de variabile de abatere egal cu numărul inecuațiilor cu semnul $\geqslant$. Fiind dat sistemul (I.2.47), dacă se scade din fiecare inecuație o variabilă nenegativă x_{n+i}, $i = 1, \ldots, m$, sistemul se scrie:

$$\sum_{j\in N} a_{ij}\, x_j - x_{n+i} = d_i\,; \quad d_i \geqslant 0\,; \ i\in M. \tag{I.2.51}$$

Este evident că orice soluție realizabilă a sistemului (I.2.51) este în același timp o soluție realizabilă pentru sistemul (I.2.47), dar vectorii a_{n+i} nu formează o matrice unitate $E^{(m)}$. Fie $d_k = \max\limits_{i\in M} (d_i)$. Scăzînd toate ecuațiile sistemului (I.2.51) din ecuația k și adunînd acesteia o variabilă de abatere x_{n+m+1}, avem sistemul echivalent

$$\sum_{j\in N} (a_{kj} - a_{ij})\, x_j + x_{n+i} - x_{n+k} = d_k - d_i\,; \ i\in M \text{ și } i \neq k,$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\, x_{ij} - x_{n+k} + x_{n+m+1} = d_k, \tag{I.2.52}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care vectorii a_{n+i}, $i \in M$; $i \neq k$, împreună cu vectorul a_{n+m+1}, formează o matrice $E^{(m)}$. Funcţia obiectiv ataşată acestui sistem se obţine adăugînd funcţiei obiectiv iniţiale variabila x_{n+m+1} cu coeficientul de penalizare M, astfel:

$$\max \ [\min] \ z = \sum_{j \in N} c_j \ x_j + M x_{n+m+1}. \qquad \text{(I.2.53)}$$

Aceste modificări măresc cu o unitate numărul variabilelor, dar micşorează cu $(m - 1)$ unităţi numărul coeficienţilor de penalizare.

Problemele de programare liniară care necesită introducerea variabilelor artificiale se mai pot rezolva şi prin următoarea metodă.

Metoda în două faze. Dacă modelul problemei de programare liniară este adus la forma (I.2.1) — (I.2.2), soluţia optimă poate fi găsită astfel:

Faza I. Se determină o soluţie realizabilă de bază a problemei iniţiale — dacă există — înlocuind problema propusă cu următoarea *problemă auxiliară*:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ x_j + x_{n+i} = d_i \qquad i \in M,$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j \in N,$$

$$x_{n+i} \geqslant 0 \qquad i \in M ; \qquad \text{(I.2.54)}$$

$$\min \ \xi = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i}. \qquad \text{(I.2.55)}$$

Evident că orice soluţie de bază a problemei iniţiale este o soluţie optimă a problemei auxiliare, deoarece pentru o astfel de soluţie toţi $x_{n+i} = 0$ deci şi $\xi = 0$. Soluţia optimă a problemei auxiliare poate da:

a) $\min \ \xi > 0$ şi atunci *problema iniţială nu are o soluţie realizabilă de bază*, fiindcă $\xi > 0$ implică cel puţin un $x_{n+i} > 0$;

b) $\min \ \xi = 0$, deci toţi $x_{n+i} = 0$ şi atunci:

b_1) nici o variabilă artificială nu intră în bază, deci soluţia optimă a problemei auxiliare este o soluţie de bază a problemei iniţiale, sau

Scanned with OKEN Scanner

b_2) baza optimă conține variabile artificiale cu valoarea zero, deci soluția optimă a problemei auxiliare este o soluție degenerată a problemei inițiale.

Faza II. Se aplică algoritmul simplex problemei inițiale.

Dacă sîntem în situația b_1) tabelul simplex în faza II cuprinde numai vectorii matricei A înscriși în baza optimă a problemei auxiliare; vectorii asociați variabilelor artificiale sînt șterși din tabel, fiindcă aceste variabile nu mai pot intra în bază după ce au fost excluse.

Dacă ne găsim în situația b_2) tabelul simplex în faza II conține pe lîngă vectorii matricei A și vectorii asociați variabilelor artificiale care aparțin soluției optime a fazei I.

În ambele cazuri, tabelele simplex în faza II corespund unor *probleme restrînse* care diferă de problema inițială prin condiția suplimentară $x_j = 0$ pentru toți $\xi_j - c_j$ strict negativ la sfîrșitul fazei I.

Exemplul VI. Să se determine

$$\min z = 6x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 10x_4, \tag{I.2.56}$$

dacă variabilele satisfac sistemul de condiții:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3; \\ x_j \geqslant 0 \quad j &= 1, \ldots, 4. \end{aligned} \tag{I.2.57}$$

Rezolvare prin metoda penalizării. Problema transformată prin introducerea variabilelor artificiale are modelul următor:

$$\min z = 6x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 10x_4 + Mx_5 + Mx_6 + Mx_7;$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 &= 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_7 &= 3; \\ x_j \geqslant 0; \quad j &= 1, \ldots, 7. \end{aligned} \tag{I.2.58}$$

Scanned with OKEN Scanner

Baza formată din vectorii a_5, a_6, a_7 corespunde unei soluții realizabile de bază. Iterațiile necesare optimizării acestei soluții sînt date în tabelul următor:

Tabelul simplex pentru exemplul VI

(4)

c_B ↓	c_j ⟶		M	M	M	6	8	12	10	
	Baza	d	a_5	a_6	a_7	a_1	a_2	a_3	a_4	
M	a_5	2	1	0	0	1	1	0	1	
M	a_6	4	0	1	0	1	2*	1	0	Iterația 0
M	a_7	3	0	0	1	0	1	1	1	
	$z_j - c_j$	$9M$	0	0	0	$2M$ -6	$4M$ -8	$2M$ -12	$2M$ -10	
M	a_5	0	1	$-1/2$	0	$1/2$	0	$-1/2$	1*	
8	a_2	2	0	$+1/2$	0	$1/2$	1	$1/2$	0	Iterația 1
M	a_7	1	0	$-1/2$	1	$-1/2$	0	$1/2$	1	
	$z_j - c_j$	M $+16$	0	$-2M$ $+4$	0	-2	0	-8	$2M$ -10	
10	a_4	0	1	$-1/2$	0	$1/2$	0	$-1/2$	1	
8	a_2	2	0	$1/2$	0	$1/2$	1	$1/2$	0	Iterația 2
M	a_7	1	-1	0	1	-1	0	1*	0	
	$z_j - c_j$	M $+16$	$-2M$ 10	$-M$ -1	0	$-M$ $+3$	0	M -13	0	
10	a_4	1/2	1/2	$-1/2$	1/2	0	0	0	1	
8	a_2	3/2	1/2	1/2	$-1/2$	1	1	0	0	Iterația 3
12	a_3	1	-1	0	1	-1	0	1	0	
	$z_j - c_j$	29	$-M$ -3	$-M$ -1	$-M$ $+13$	-10	0	0	0	

Scanned with OKEN Scanner

În iterația 3 se elimină din bază toate variabilele artificiale și soluția găsită este optimă.

Dacă vectorul a_4 (1, 0, 1) se înlocuiește cu a_4' (−1, 0, 1), linia $z_j - c_j$ din iterația 1 a tabelului simplex nu mai conține nici o valoare pozitivă, dar soluția de bază conține variabila artificială x_7 cu valoare strict pozitivă. Deci, problema inițială nu are soluție optimă.

Să urmărim cum se modifică soluția dacă și vectorul d (2, 4, 3) se înlocuiește cu d'(2, 4, 2), iar vectorul a_1(1, 1, 0) cu vectorul a_1' (−1, 1, 0).

Refacem tabelul simplex cu noile date și avem:

Tabelul simplex pentru exemplul VI modificat

(5)

c_B ↓	c ⟶		M	M	M	6	8	12	10
	Baza	d	a_5	a_6	a_7	a_1	a_2	a_3	a_4
M	a_5	2	1	0	0	−1	1	0	−1
M	←a_6	4	0	1	0	1	2*	1	0
M	a_7	2	0	0	1	0	1	1	1
	$z_j - c_j$	$8M$	0	0	0	−6	$4M$ −8	$2M$ −12	−10
M	a_5	0	1	−1/2	0	−3/2	0	−1/2	−1
8	a_2	2	0	1/2	0	1/2	1	1/2	0
M	a_7	0	0	−1/2	1	−1/2	0	1/2	−1
	$z_j - c_j$	16	0	$-2M$ 4	0	$-2M$ −2	0	−4	$-2M$ −10

În ultima iterație, toate diferențele $z_j - c_j$ sînt negative. Deci, soluția nu se poate îmbunătăți. Pentru problema inițială aceasta este o soluție de bază degenerată, fiindcă variabilele artificiale intră în bază cu valori nule.

Exemplul VII. Să se determine soluția sistemului

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_5 &= 1, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 12, \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 &= 15; \\ x_i \geqslant 0; \quad i &= 1, \ldots, 5, \end{aligned} \tag{I.2.59}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru care avem

$$\max z = 10x_1 - 9x_2 + 2x_3 - x_4 + 6x_5. \qquad \text{(I.2.60)}$$

Scăzînd din fiecare ecuație a sistemului (I.2.59) o variabilă nenegativă și apoi scăzînd primele două egalități obținute din a treia, avem

$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 + x_6 \quad - x_8 \quad &= 14, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 \quad + x_7 - x_8 \quad &= 3, \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 \quad - x_8 + x_9 &= 15. \end{aligned} \qquad \text{(I.2.61)}$$

Acestui sistem i se atașază funcția obiectiv

$$\max z = 10x_1 - 9x_2 + 2x_3 - x_4 + 6x_5 - Mx_9. \qquad \text{(I.2.62)}$$

Baza formată din vectorii a_6, a_7, a_9 corespunde soluției $x_6 = 14$; $x_7 = 3$; $x_9 = 15$, care poate servi ca soluție inițială în aplicarea algoritmului simplex. În iterația a patra se obține soluția optimă de bază: $x_1 = 13/9$; $x_2 = 0$; $x_3 = 10/3$; $x_4 = 35/9$; $x_5 = 0$.

Exemplul VIII. Să se rezolve problema formulată în exemplul VII prin metoda în două faze.

Faza I. Se caută soluția optimă a modelului

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 \quad + 3x_5 + x_6 \quad &= 1, \\ x_1 \quad + 2x_3 + x_4 \quad + x_7 \quad &= 12, \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 \quad + x_8 &= 15; \end{aligned} \qquad \text{(I.2.63)}$$

$$x_i \geqslant 0; \quad i = 1, \ldots, 8;$$

$$\min \xi = x_6 + x_7 + x_8. \qquad \text{(I.2.64)}$$

În tabelul simplex al acestui exemplu se vor nota cu K_j coeficienții variabilelor în funcția obiectiv a problemei auxiliare și cu c_j coeficienții variabilelor în funcția obiectiv (I.2.60) a problemei inițiale. În iterația în care soluția găsită este optimă pentru problema auxiliară se calculează și diferențele $z_j - c_j$. În exemplul folosit se cere maximi-

Scanned with OKEN Scanner

zarea funcției obiectiv, deci condițiile de optimalitate a soluției sînt $z_j - c_j \geqslant 0\,;\, j \in J$. Aceste condiții sînt îndeplinite pentru soluția optimă a problemei auxiliare, deci nu mai este necesară aplicarea fazei a doua a metodei. În tabelul simplex al exemplului VIII nu s-au mai completat, în iterațiile următoare, componentele vectorilor care au ieșit din bază într-o iterație anterioară, deoarece, așa cum se poate ușor dovedi, acești vectori nu mai pot candida la intrarea în bază.

Tabelul simplex al fazei I, exemplul VIII

(6)

c_B	$c_j \longrightarrow$		0	0	0	10	−9	2	−1	6
$K_B \downarrow$		K_j	1	1	1	0	0	0	0	0
	Baza	d	a_6	a_7	a_8	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	a_6	1	1	0	0	3*	−2	−1	0	3
1	a_7	12	0	1	0	1	0	2	1	0
1	a_8	15	0	0	1	0	2	1	3	−1
	$\xi_j - K_j$	28	0	0	0	4	0	2	4	2
0	a_1	1/3		0	0	1	−2/3	−1/3	0	1
1	a_7	35/3		1	0	0	2/3	7/3	1	−1
1	a_8	15		0	1	0	2	1	3*	−1
	$\xi_j - K_j$	26 2/3		0	0	0	8/3	10/3	4	−2
0	a_1	1/3		0		1	−2/3	−1/3	0	1
1	a_7	20/3		1		0	0	2*	0	−2/3
0	a_4	5		0		0	2/3	1/3	1	−1/3
c_B		$\xi_j - K_j$	20/3		0	0	0	2	0	−2/3
10	0	a_1	13/9			1	−2/3	0	0	8/9
2	0	a_3	10/3			0	0	1	0	−1/3
−1	0	a_4	35/9			0	2/3	0	1	−2/9
		$\xi_j - K_j$	0			0	0	0	0	0
		$z_j - c_j$	155/9			0	5/3	0	0	22/9

Scanned with OKEN Scanner

Reamintim că o soluție de bază realizabilă a unei probleme de programare liniară este un vector care verifică sistemul restricțiilor și are un număr de componente strict pozitive, cel mult egal cu numărul de restricții din sistem. Dacă numărul acestor componente strict pozitive este mai mic decît al restricțiilor sistemului, soluția este o *soluție degenerată de bază*. O astfel de soluție se obține dacă:

— vectorul d are componente nule;

— dacă elementul de soluție g_{kl} nu este unic determinat. Asupra primei afirmații nu este necesar să insistăm. Pentru lămurirea celui-lalt caz să admitem că vectorul g_l, ales cu ajutorul criteriului de intrare, trebuie introdus în bază și că, prin aplicarea criteriului de ieșire, se găsesc două rapoarte $\frac{x_k}{g_{lk}}$ și $\frac{x_f}{g_{fk}}$, astfel încît

$$\frac{x_k}{g_{kl}} = \frac{x_f}{g_{fl}} = \min_{s \in I} \left\{ \frac{x_s}{g_{sk}} ; \quad g_{sk} > 0 \right\}. \tag{I.2.65}$$

În acest caz, vectorul a_l poate înlocui în bază pe oricare dintre vectorii a_k și a_f. Să admitem că s-a hotărît ca a_l să înlocuiască vectorul a_k. Componentele noului vector soluție se calculează cu formulele (I.2.36) și (I.2.37), în care $g_{kj} = g_{kl}$. Să calculăm componenta x'_f a noii soluții. Avem

$$x'_f = x_f - \frac{g_{fl}}{g_{kl}} x_k = 0$$

dacă este îndeplinită condiția (I.2.65), deci se ajunge la o soluție de bază degenerată.

Dacă în cursul aplicării algoritmului simplex soluția obținută într-o iterație este degenerată, funcția obiectiv poate lua aceeași valoare în mai multe iterații succesive și uneori se poate reveni la o bază deja folosită. Într-un asemenea caz, cunoscut sub numele de *ciclare*, iterațiile următoare constau în regăsirea unei succesiuni de baze deja studiate. Fenomenul ciclării se produce foarte rar. Deși multe probleme reale de programare liniară sînt degenerate, foarte rar în practică se poate întîlni un caz de ciclare. În literatura de specialitate sînt tratate numai două exemple de ciclare datorate lui Hoffman [42]* și Beale [8].

* Toate trimiterile la bibliografia de la sfîrșitul cărții sînt însemnate cu cifre în paranteze drepte.

Scanned with OKEN Scanner

Cele mai cunoscute metode pentru evitarea ciclării sînt: *metoda perturbațiilor*, stabilită de A. Charnes [14], și *metoda lexicografică*, datorită lui G. B. Dantzig și P. Wolfe [21].

În cele ce urmează se va expune numai prima metodă, care constă în înlocuirea problemei originale cu o problemă generalizată. Fie

$$Bx^B + Rx^R = d \tag{I.2.66}$$

ecuația matricială a problemei originale. În problema generalizată această ecuație se înlocuiește prin

$$Bx^B + Rx^R = d + \sum_{j \in J} \varepsilon^j a_j, \tag{I.2.67}$$

în care ε^j sînt mărimi pozitive care pot fi oricît de mici. Vectorul

$$x^B(\varepsilon) = B^{-1} d + \sum_{j \in J} \varepsilon^j B^{-1} a_j = B^{-1} d + \sum_{j \in J} \varepsilon^j g_j \tag{I.2.68}$$

sau

$$x_s(\varepsilon) = x_s + \sum_{j \in J} \varepsilon^j g_{sj} \; ; \quad s \in I \tag{I.2.69}$$

este soluția de bază a ecuației (I.2.67) care corespunde bazei B. Cînd $\varepsilon^j \to 0$, $x_s(\varepsilon) \to x_s$ deci verifică ecuația (I.2.66). Criteriul de ieșire din bază pentru problema generalizată este

$$\frac{x_k(\varepsilon)}{g_{kl}} = \min_{s \in I} \left\{ \frac{x_s + \sum_{j \in J} \varepsilon^j g_{sj}}{g_{sl}} \; ; \; g_{sl} > 0 \right\}. \tag{I.2.70}$$

Dacă rapoartele $\frac{x_s}{g_{sl}}$ sînt egale pentru mai mulți $s \in I$, se compară succesiv rapoartele $\frac{\varepsilon^j g_{sj}}{g_{sl}}$; $j \in J$ pînă cînd se găsesc două rapoarte de valori diferite și se poate determina raportul minim. Această metodă înlătură arbitrarul în determinarea vectorului care trebuie scos din bază și asigură evitarea ciclării.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul IX. Să se găsească valorile nenegative ale variabilelor x_i; $i = 1, \ldots, 5$, care satisfac sistemul de restricţii

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 &= 5, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 15, \\ 2x_2 - x_3 - 4x_4 &\leqslant 0 \end{aligned} \tag{I.2.71}$$

şi minimizează funcţia

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5. \tag{I.2.72}$$

Soluţie. Problema propusă se va rezolva prin metoda în două faze.

Modelul pentru faza I este

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 + x_6 &= 5, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_7 &= 15, \\ 2x_2 - x_3 - 4x_4 + x_8 &= 0; \end{aligned} \tag{I.2.73}$$

$$\min \xi = x_6 + x_7. \tag{I.2.74}$$

Funcţia ξ include numai variabilele artificiale, de aceea nu conţine pe x_8 care este variabila de abatere (vezi tabelul 7).

Din tabelul iteraţiei 0 se constată că soluţia iniţială este degenerată şi că se îmbunătăţeşte prin intrarea vectorului a_3 în bază. Calculînd rapoartele dintre componentele vectorului d şi componentele nenegative ale vectorului a_3 avem rapoarte egale pentru a_6 şi a_7, deci nu este determinat vectorul care trebuie scos din bază. Metoda perturbaţiilor cere înlocuirea componentelor $x_6 = 5$; $x_7 = 15$ ale vectorului x, prin

$$\bar{x}_6(\varepsilon) = 5 - 1 \cdot \varepsilon + 3 \cdot \varepsilon^2 + 1 \cdot \varepsilon^3 + 0 \cdot \varepsilon^4 + 1 \cdot \varepsilon^5;$$

$$\bar{x}_7(\varepsilon) = 15 - 1 \cdot \varepsilon - 1 \cdot \varepsilon^2 + 3 \cdot \varepsilon^3 + 2 \cdot \varepsilon^4 + 2 \cdot \varepsilon^5.$$

Rapoartele care interesează sînt acum

$$\frac{\bar{x}_6(\varepsilon)}{a_{6,3}} = 5 - \varepsilon + 3 \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^5 \quad \text{şi} \quad \frac{\bar{x}_7(\varepsilon)}{a_{7,3}} = 5 - \frac{1}{3} \cdot \varepsilon - \frac{1}{3} \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \frac{2}{3} \cdot \varepsilon^4 + \frac{2}{3} \cdot \varepsilon^5.$$

Primii doi termeni au aceeaşi valoare în ambele rapoarte, dar termenul al doilea este mai mic în $\frac{\bar{x}_7(\varepsilon)}{a_{7,3}}$. Deoarece ε este foarte mic,

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul simplex pentru faza I

(7)

		$c_j \longrightarrow$		0	0	0	1	1	1	1	−1	
	K_B ↓	$K_j \longrightarrow$		1	1	0	0	0	0	0	0	Iterația
		Baza	d	a_6	a_7	a_8	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
	1	a_6	5	1	0	0	−1	3	1	0	1	
	1	$\leftarrow a_7$	15	0	1	0	−1	−1	3*	2	2	
	0	a_8	0	0	0	1	0	2	−1	−4	0	0
		$\xi_j - K_j$	20	0	0	0	−2	2	4	2	3	
	1	$\leftarrow a_6$	0	1	−1/3	0	−2/3	10/3*	0	−2/3	1/3	
	0	a_3	5	0	1/3	0	−1/3	−1/3	1	2/3	2/3	
	0	a_8	5	0	1/3	1	−1/3	5/3	0	−10/3	2/3	1
c_B		$\xi_j - K_j$	0	0	−4/3	0	−2/3	10/3	0	−2/3	1/3	
1	0	$\rightarrow a_2$	0	3/10	−1/10	0	−1/5	1	0	−1/5	1/10*	
1	0	a_3	5	1/10	3/10	0	−2/5	0	1	3/5	7/10	
0	0	a_8	5	−1/2	1/2	1	0	0	0	−3	1/2	
		$\xi_j - K_j$	0	−1	−1	0	0	0	0	0	0	2
		$z_j - K_j$	5	2/5	1/5	0	−8/5	0	0	−3/5	9/5	

cercetarea se oprește la primii termeni de valori diferite. Vectorul care iese din bază este a_7. Vectorul soluție și funcția obiectiv rămîn nemodificate în iterația 2 din cauză că soluția din iterația 1 este degenerată. În ultimul tabel simplex optim pentru faza I se calculează și elementele $z_j - c_j$ corespunzătoare funcției obiectiv a problemei inițiale. Se observă că $z_5 - c_5 > 0$, deci soluția optimă pentru faza I nu este optimă și pentru problema inițială.

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz se trece la faza II. Iterația 0 a acestei faze coincide cu iterația optimă a fazei I.

Tabelul simplex pentru faza II

(8)

c_B ↓	$c_j \longrightarrow$		0	0	0	1	1	1	1	−1	Iterația
	Baza	d	a_6	a_7	a_8	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
1	$\leftarrow a_2$	0	3/10	−1/10	0	−1/5	1	0	−1/5	1/10*	
1	a_3	5	1/10	3/10	0	−2/5	0	1	3/5	7/10	0
0	a_8	5	−1/2	1/2	1	0	0	0	−3	1/2	
	$z_j - c_j$	5	2/5	1/5	0	−8/5	0	0	−3/5	9/5	
−1	a_5	0	3	−1	0	−2	10	0	−2	1	
1	$\leftarrow a_3$	5	−2	1	0	1	−7	1	2*	0	1
0	a_8	5	−1/5	1	1	2	−5	0	−2	0	
	$z_j - c_j$	5	−5	2	0	2	−18	0	3	0	
−1	a_5	5	1	0	0	−1	3	1	0	1	
	$\leftarrow a_4$	5/2	−1	1/2	0	1/2*	−7/2	1/2	1	0	2
0	a_8	10	−11/5	2	1	−3	−12	1	0	0	
	$z_j - c_j$	−5	−2	1/2	0	1/2	−15/2	−3/2	0	0	
−1	a_5	10	−1	1	0	0	−4	2	2	1	
1	a_1	5	−2	1	0	1	−7	1	2	0	3
0	a_8	25	−41/5	5	1	0	−33	4	6	0	
	$z_j - c_j$	−5	−1	0	0	0	−4	−2	−1	0	

În iterația 3, pe linia $z_j - c_j$ nu mai avem diferențe pozitive, deci soluția optimă se citește din acest tabel.

Scanned with OKEN Scanner

§ 3. METODA SIMPLEX REVIZUITĂ SAU METODA MULTIPLICATORILOR

1. Introducere

Examinînd desfăşurarea calculelor necesare aplicării algoritmului primal simplex, se observă că:

1) pentru construirea iteraţiei $(k+1)$ este suficient să fie cunoscute numai o parte din elementele tabelului anterior şi anume:

a) variabilele din linia $z_k - c_k$ (utilizate pentru determinarea vectorului care intră în bază);

b) componentele vectorului d şi ale celui care intră în bază (folosite pentru stabilirea vectorului care iese din bază);

2) toate elementele tabelului simplex din iteraţia k se pot calcula din tabelul simplex iniţial (iteraţia 0), cunoscînd inversa bazei din iteraţia k.

Pentru justificarea acestei afirmaţii reamintim că un vector-coloană a_j din matricea A a sistemului restricţiilor se scrie în baza B:

$$g_j = B^{-1} a_j, \tag{I.3.1}$$

deci pentru calculul componentelor vectorului a_j în iteraţia k este suficient să se cunoască B_k^{-1}, inversa bazei B_k din această iteraţie. Aceeaşi regulă de calcul se aplică şi vectorului d, deoarece d este un vector din matricea extinsă $A_e = [A, d]$. Prin urmare, vectorii a_j; $j \in J$ şi d, în interaţia k, se transformă în

$$g_j = B_k^{-1} a_j; \qquad \bar{d} = B_k^{-1} d. \tag{I.3.2}$$

În problemele de programare liniară funcţia obiectiv este o funcţie liniară: $cx = z$. Considerînd sistemul

$$\begin{aligned} Ax \quad &= d, \\ -cx + z &= 0 \end{aligned} \tag{I.3.3}$$

ca un sistem de ecuaţii liniare, matricea

$$A^* = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix} \tag{I.3.4}$$

poate fi privită tot ca o extindere a matricei A. Dacă $r(A) = m$, este ușor de observat că $r(A^*) = m + 1$. Dacă $B(a_{j_1}, \ldots, a_{j_m})$ este o bază a spațiului m-dimensional formată din vectorii matricei A, atunci

$$B^* = \begin{bmatrix} a_{j_1} \ldots a_{j_m} & 0 \\ -c_{j_1} \ldots -c_{j_m} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ -c_B & E^{(1)} \end{bmatrix} \tag{I.3.5}$$

este o bază a spațiului $(m + 1)$-dimensional formată din vectorii matricei A^*. De aici se deduc următoarele:

Observația I. Orice vector coloană al matricei A^* în iterația k se calculează făcînd produsul dintre inversa bazei și acel vector.

Observația II. Un element a_{lj} din A, în iterația k, este egal cu produsul scalar al vectorului-linie $B^{(l)}$ din $[B_k^*]^{-1}$ prin vectorul-coloană a_j din A.

Observația III. Coeficienții ecuației l în iterația k, se obțin făcînd produsele scalare dintre vectorul-linie $B^{(l)}$ din $[B^*]^{-1}$ și vectorii din matricea inițială. În particular avem:

Observația IV. Coeficienții ecuației z în iterația k se obțin făcînd produsele scalare dintre ultima linie din $[B_k^*]^{-1}$ și vectorii-coloană din matricea inițială. Pentru fixarea și verificarea acestor observații să considerăm:

Exemplul I. Fie dat sistemul

$$\begin{aligned}
2x_1+3x_2-\ x_3+4x_4+\ x_5-\ x_6+x_7 &= 4,\\
x_2+2x_3-\ x_4 \qquad\qquad +x_8 &= 6,\\
x_1 \qquad +\ x_4 \quad +\ x_6 \qquad +x_9 &= 8,\\
2x_2+\ x_3 \quad +\ x_5 \qquad\qquad +x_{10} &= 9,\\
-5x_1-8x_2-7x_3-4x_4-9x_5-8x_6 \qquad\qquad +z &= 0,
\end{aligned} \tag{I.3.6}$$

în care funcția obiectiv este prezentată ca o ecuație a sistemului restricțiilor. Vectorii atașați variabilelor x_7, x_8, x_9, x_{10}, z constituie o bază a spațiului R_5, iar A^* este

$$A^* = \left[\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
2 & 3 & -1 & 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
-5 & -8 & -7 & -4 & -9 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \tag{I.3.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem că vrem să explicităm sistemul în raport cu variabilele x_1, x_3, x_5, x_6 și z și că în acest scop folosim metoda simplex. Iterațiile necesare sînt redate în tabelul următor:

Iterațiile exemplului 1

(9)

Baza	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	z	d	Iterația
$\leftarrow a_7$	2*	3	−1	4	1	−1	1					4	
a_8	0	1	2	−1	0	0		1				6	
a_9	1	0	0	1	0	1			1			8	
a_{10}	0	2	1	0	1	0				1		9	0
z	−5	−8	−7	−4	−9	−8					1	0	
$\rightarrow a_1$	1	3/2	−1/2	2	1/2	−1/2	1/2					2	
$\leftarrow a_8$		1	2*	−1	0	0	0	1				6	
a_9		−3/2	1/2	−1	−1/2	3/2	−1/2		1			6	
a_{10}		2	1	0	1	0	0			1		9	1
z	0	−1/2	−19/2	6	−13/2	−21/2	5/2				1	10	
a_1	1	7/4		7/4	1/2	−1/2	1/2	1/4				7/2	
$\rightarrow a_3$		1/2	1	−1/2	0	0	0	1/2				3	
$\leftarrow a_9$		−7/4		−3/4	−1/2*	3/2	−1/2	−1/4	1			9/2	
a_{10}		3/2		1/2	1	0	0	−1/2		1		6	2
z	0	17/4	0	5/4	−13/2	−21/2	5/2	19/4			1	77/2	
a_1	1	0		1		1	0	0	1			8	
a_3		1/2	1	−1/2		0	0	1/2	0			3	
$\rightarrow a_5$		7/2		3/2	1	−3	1	1/2	−2			−9	
$\leftarrow a_{10}$		−2		−1		3*	−1	−1	2	1		15	3
z	0	27	0	11	0	−30	9	8	−13		1	−20	
a_1	1	2/3		4/3			1/3	1/3	1/3	−1/3		3	
a_3		1/2	1	−1/2			0	1/2	0	0		3	
a_5		3/2		1/2	1		0	−1/2	0	1		6	
$\rightarrow a_6$		−2/3		−1/3		1	−1/3	−1/3	2/3	1/3		5	4
z	0	−3	0	1	0	0	−1	−2	7	10		130	

Scanned with OKEN Scanner

Baza sistemului (I.3.6) în iterația IV este $B_4^*(a_1, a_3, a_5, a_6, z)$ și inversa ei B_4^{*-1} este formată din componentele vectorilor a_7, a_8, a_9, a_{10} și z în această iterație. Pentru verificare se calculează:

$$B_4^*[B_4^*]^{-1} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -5 & -7 & -9 & -8 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc|c} 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ \hline -1 & -2 & 7 & 10 & 1 \end{array}\right] = E^{(5)} \qquad \text{(I.3.8)}$$

Calculul componentelor unui vector-coloană, de exemplu $\left[\begin{array}{c} a_2 \\ \cdots \\ -c_2 \end{array}\right]$, în iterația 4, se poate face, în baza observației I, astfel:

$$[B_4^*]^{-1}\left[\begin{array}{c} a_2 \\ \cdots \\ -c_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ \hline -1 & -2 & 7 & 10 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ \hline -8 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2/3 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ -2/3 \\ \hline -3 \end{array}\right] \qquad \text{(I.3.9.)}$$

Valoarea unui element oarecare din tabelul iterației 4, de exemplu $g_{2,4}$, se stabilește, conform observației II, făcînd produsul scalar dintre vectorul linie $\beta^{(2)}$ din $[B_4^*]^{-1}$ și vectorul coloană a_4 din iterația 0, astfel:

$$g_{2,4} = (0, 1/2, 0, 0, 0)\ [4, -1, 1, 0, -4] = -1/2 \qquad \text{(I.3.10)}$$

Elementele unei linii oarecare din tabelul iterației 4, de exemplu ale primei linii, se găsesc, conform observației III, făcînd produsele scalare dintre vectorul linie β_1 din $[B_4^*]^{-1}$ și vectorii coloană din tabelul inițial. Avem:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{11} &= \beta_1 a_1 = (1/3,\ 1/3,\ 1/3,\ -1/3,\ 0)\ [\ 2,\ \ 0, 1,\ \ 0, -5] = 1, \\
\tilde{a}_{12} &= \beta_1 a_2 = (1/3,\ 1/3,\ 1/3,\ -1/3,\ 0)\ [\ 3,\ \ 1, 0,\ \ 2, -8] = 2/3, \\
\tilde{a}_{13} &= \beta_1 a_3 = (1/3,\ 1/3,\ 1/3,\ -1/3,\ 0)\ [-1,\ \ 2, 0,\ \ 1, -7] = 0, \\
\tilde{a}_{14} &= \beta_1 a_4 = (1/3,\ 1/3,\ 1/3,\ -1/3,\ 0)\ [\ 4, -1, 1,\ \ 0, -4] = 4/3, \\
\tilde{a}_{15} &= \beta_1 a_5 = (1/3,\ 1/3,\ 1/3,\ -1/3,\ 0)\ [\ 1,\ \ 0, 0,\ \ 1, -9] = 0, \\
\tilde{a}_{16} &= \beta_1 a_6 = (1/3,\ 1/3,\ 1/3,\ -1/3,\ 0)\ [-1,\ \ 0, 1,\ \ 0, -8] = 0.
\end{aligned} \qquad \text{(I.3.11)}$$

Scanned with OKEN Scanner

În baza observației IV, coeficienții liniei z în iterația 4 se calculează astfel:

$$\tilde{z}_1 = (-1,\ -2,\ 7,\ 10,\ 1)\ [2,\ 0,\ 1,\ 0,\ -5] = 0,$$

$$\tilde{z}_2 = (-1,\ -2,\ 7,\ 10,\ 1)\ [3,\ 1,\ 0,\ 2,\ -8] = -3 \text{ etc.}$$

2. Multiplicatori simplex

Observațiile din paragraful anterior conduc la concluzia că pentru aplicarea algoritmului primal simplex este suficient să cunoaștem inversa bazei și să calculăm mărimile $z_j - c_j$ și componentele vectorului care intră în bază.

G. B. Dantzig și W. Orchard-Hays [21], plecînd de la aceste observații, au construit metoda simplex revizuită sau metoda multiplicatorilor, care are avantajul de a cere mai puține calcule pentru determinarea soluției optime decît algoritmul primal simplex. Acest avantaj este tot atît de important în cazul în care se fac calculele manual ca și în cazul în care se folosesc mașinile electronice. Rezolvarea unei probleme de programare liniară prin metoda simplex revizuită necesită folosirea unei mașini electronice cu o „memorie" mai redusă decît aceeași problemă tratată prin algoritmul primal simplex.

Denumirea de „metodă a multiplicatorilor" dată algoritmului stabilit de G. B. Dantzig și W. Orchard-Hays este justificată de folosirea unui grup de numere notate cu $\pi_1, \ldots, \pi_n$ care se numesc *multiplicatori simplex*. Pentru definirea acestor numere să scriem sistemul de restricții al problemei sub forma

$$\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq j_i}} a_{ij}\, x_j + x_{j_i} = d_i\,; \qquad \begin{matrix} i \in M, \\ j_i \in I \end{matrix} \qquad \text{(I.3.12)}$$

(în care sînt puse în evidență variabilele din bază x_{j_i}) și funcția obiectiv sub forma

$$-\sum_{j \in N} c_{ij}\, x_j + z = 0. \qquad \text{(I.3.13)}$$

În cele ce urmează ecuația (I.3.13) va fi numită z-ecuația problemei.

Prin definiție, multiplicatorii simplex din iterația k sînt numerele π_i astfel determinate încît, înmulțind fiecare ecuație a sistemului (I.3.12) cu multiplicatorul corespunzător și adunînd ecuațiile, astfel amplificate, cu z-ecuația (I.3.13), să se obțină o ecuație care să nu conțină variabilele care aparțin bazei din iterația k; sau, ceea ce este

acelaşi lucru, variabilele de bază din iteraţia k să aibă coeficienţi nuli în z-ecuaţia acestei iteraţii.

Astfel, în exemplul I din § 3 multiplicatorii simplex în iteraţia 2 sînt $\pi_1 = 5/2$; $\pi_2 = 19/4$; $\pi_3 = 0$; $\pi_4 = 0$, deoarece înmulţind ecuaţiile sistemului iniţial cu aceste numere şi adunîndu-le cu z-ecuaţia iteraţiei 0 se obţine o funcţie în care coeficienţii variabilelor din bază x_1, x_3, x_9, x_{10}, din iteraţia 2, sînt nuli. Multiplicatorii simplex în iteraţia 3 sînt $\pi_1 = 9$; $\pi_2 = 8$; $\pi_3 = -13$; $\pi_4 = 0$. Verificarea se face la fel ca în cazul precedent. Se observă că :

— multiplicatorii simplex sînt specifici fiecărei iteraţii. Acest lucru este normal, deoarece fiecare iteraţie se caracterizează printr-un anumit grup de variabile de bază ;

— valorile multiplicatorilor simplex pentru iteraţia k sînt elementele utimei linii din $[B_4^*]^{-1}$.

Coeficienţii funcţiei obiectiv, $c_1, \ldots, c_n$, pot fi interpretaţi ca „preţuri" ale activităţilor $x_1, \ldots, x_n$. G. B. Dantzig denumeşte *preţuire a unei activităţi în funcţie de grupul activităţilor de bază* produsul scalar dintre vectorul format de multiplicatorii simplex ai bazei şi vectorul acelei activităţi.

Rezultatul preţuirii unei activităţi într-o anumită bază se numeşte *preţul comparativ* al activităţii. În fond, preţul comparativ al unei activităţi într-o bază B este coeficientul variabilei care reprezintă acea activitate în z-ecuaţia scrisă în baza B. Operaţia necesară determinării preţului comparativ al activităţii caracterizate de vectorul a_j se poate scrie schematic în forma următoare :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \pi_1 & a_{1j} \\ \pi_2 & a_{2j} \\ \vdots & \vdots \\ \pi_m & a_{mj} \\ 1 & -c_j \\ \hline \end{array} \qquad \text{(I.3.14)}$$

Acest mod de prezentare a calculului sugerează ideea că dacă se copiază pe o hîrtie, vertical, multiplicatorii π_i şi se alătură pe rînd coloanelor a_j, se înlesneşte determinarea preţurilor comparative.

Preţul comparativ al activităţii desfăşurate la nivelul x_j, calculat după schema (I.3.13), este

$$\bar{c}_j = \pi_1 a_{1j} + \pi_2 a_{2j} + \ldots + \pi_m a_{mj} - c_j. \qquad \text{(I.3.15)}$$

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, pentru a stabili prețul activității a_2 în interația 3 calculăm astfel:

$$\left|\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 8 & 1 \\ -13 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -8 \end{array}\right|$$

și obținem rezultatul 27 pe care îl găsim înscris în linia z, coloana a_2 din iterația 3.

În expunerea metodei multiplicatorilor, G. B. Dantzig mai folosește și denumirea sugestivă de *reprezentare a unei activități în funcție de grupul activităților de bază* pentru operația de calcul a vectorului unei activități a_j într-o anumită bază. Se știe că vectorul a_j scris în baza B este dat de produsul $B^{-1}a_j$. Calculul componentei a_{kj} în baza B se poate scrie schematic astfel:

$$\begin{array}{|cccc|} \hline a_{1j} & a_{2j} & \ldots & a_{mj} \\ \hline \end{array}, \qquad \text{(I.3.16)}$$
$$\beta_{k1} \quad \beta_{k2} \quad \ldots \quad \beta_{km}$$

notînd cu β_{kj} elementele liniei k din inversa bazei. Această schemă sugerează ideea de a realiza calculul copiind pe o hîrtie, orizontal, componentele vectorului a_j și alăturînd succesiv vectorul transcris liniilor inversei bazei. De exemplu, reprezentarea activității a_2 în funcție de grupul activităților de bază din iterația 4 a exemplului I din § 3 se calculează astfel:

a_2:
linia 1 a matricei $[B_4^*]^{-1}$ → $\begin{array}{|cccc|} \hline 3 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}$ $\Rightarrow 2/3$

a_2:
linia 2 a matricei $[B_4^*]^{-1}$ → $\begin{array}{|cccc|} \hline 3 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{array}$ $\Rightarrow 1/2$

a_2:
linia 3 a matricei $[B_4^*]^{-1}$ → $\begin{array}{|cccc|} \hline 3 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}$ $\Rightarrow 3/2$

a_2:
linia 4 a matricei $[B_4^*]^{-1}$ → $\begin{array}{|cccc|} \hline 3 & 1 & 0 & 2 \\ \hline -1/3 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}$ $\Rightarrow -2/3$

Valorile 2/3, 1/2, 3/2, −2/3 sînt componentele vectorului a_2 în iterația 4.

Scanned with OKEN Scanner

3. Formule de calcul folosind multiplicatori

Să considerăm o problemă de programare liniară în care toate restricțiile impuse variabilelor au semnul $\geqslant$ și toți termenii liberi d_i; $i = 1, \ldots, m$, sînt nenegativi. Transformarea inecuațiilor în ecuații necesită adăugarea unei variabile artificiale în fiecare relație. Sistemul restricțiilor, în forma canonică, este

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = d_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = d_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = d_m.
\end{aligned} \tag{I.3.17}$$

Funcția obiectiv, scrisă ca z-ecuație a sistemului, este

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_n x_n + z = 0. \tag{I.3.18}$$

Se completează sistemul (I.3.17) prin adăugarea unei ecuații obținută adunînd ecuațiile sistemului (I.3.17) înmulțite cu -1.

Avem

$$-(a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \ldots + a_{0n}x_n) - w = w_0, \tag{I.3.19}$$

dacă

$$a_{0j} = \sum_{i \in M} a_{ij} \text{ pentru toți } j \in N \tag{I.3.20}$$

și

$$w_0 = -\sum_{i \in M} d_i, \tag{I.3.21}$$

iar

$$w = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}, \tag{I.3.22}$$

adică *w este suma variabilelor artificiale*. Această observație trebuie reținută, fiindcă oricare ar fi obiectivul problemei, maximizarea sau minimizarea funcției z, soluția inițială a problemei originale se obține minimizînd funcția w (faza I din metoda în două faze). Ipoteza că toate variabilele $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ sînt artificiale nu micșorează generalitatea raționamentelor. În adevăr, dacă toți x_{n+i}; $i \in M$ sînt variabile artificiale, problema originală nu are soluții decît dacă $\min w = 0$; dacă unii x_{n+i} sînt variabile de abatere, problema originală are soluții și pentru $\min w \neq 0$, cu condiția ca în bază să nu intre nici o variabilă artificială cu valoare nenulă.

Coeficienții sistemului format din ecuațiile (I.3.17), (I.3.18) și (I.3.19) formează tabelul iterației 0.

Scanned with OKEN Scanner

Iterația 0

(10)

Variabile din bază	Variabile de structură	Variabile artificiale			Constante
	$x_1 \ldots x_s \ldots x_n$	$x_{n+1} \ldots x_{n+r} \ldots x_{n+m}$	z	w	d
x_{n+1}	$a_{11} \ldots a_{1s} \ldots a_{1n}$	$1 \ldots 0 \ldots 0$	0	0	d_1
.	. . .	. . .	.	.	.
.	. . .	. . .	.	.	.
.	. . .	. . .	.	.	.
x_{n+r}	$a_{r1} \ldots a_{rs} \ldots a_{rn}$	$0 \ldots 1 \ldots 0$	0	0	d_r
.	. . .	. . .	.	.	.
.	. . .	. . .	.	.	.
.	. . .	. . .	.	.	.
x_{n+m}	$a_{m1} \ldots a_{ms} \ldots a_{mn}$	$0 \ldots 0 \ldots 1$	0	0	d_m
z	$-c_1 \ldots -c_s \ldots -c_n$	$0 \ldots 0 \ldots 0$	1	0	0
w	$-a_{01} \ldots -a_{0s} \ldots -a_{0n}$	$0 \ldots 0 \ldots 0$	0	1	$-w_0$

Problema constă în a găsi w, z și valori nenegative x_j care să satisfacă sistemul (I.3.17), să facă $w = 0$ și să maximizeze z. (Pentru determinarea min z raționamentul necesită aceleași modificări ca în algoritmul simplex primal.)

Să admitem că după k iterații se obține tabelul:

Iterația k

(11)

Variabile din bază	Variabile de structură	Variabile artificiale			Constante
	$x_1 \ldots x_s \ldots x_n$	$x_{n+1} \ldots x_{n+m}$	z	w	
x_{j_1}	$g_{11} \ldots g_{1s} \ldots g_{1n}$	$g_{1,n+1} \ldots g_{1,n+m}$	0	0	$\bar{d}_1$
.			.	.	.
.			.	.	.
.			.	.	.
x_{j_r}	$g_{r1} \ldots g_{rs} \ldots g_{rn}$	$g_{r,n+1} \ldots g_{r,n+m}$	0	0	$\bar{d}_r$
.			.	.	.
.			.	.	.
.			.	.	.
x_{j_m}	$g_{m1} \ldots g_{ms} \ldots g_{mn}$	$g_{m,n+1} \ldots g_{m,n+m}$	0	0	$\bar{d}_m$
z	$\bar{c}_1 \ldots \bar{c}_s \ldots \bar{c}_n$	$\bar{c}_{n+1} \ldots \bar{c}_{n+m}$	1	0	z_0
w	$\bar{a}_{01} \quad \bar{a}_{0s} \quad \bar{a}_{0,n}$	$\bar{a}_{0,n+1} \ldots \bar{a}_{0,n+m}$	0	1	$\bar{w}_0$

Scanned with OKEN Scanner

Variabilele din bază din iterația k sînt $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$. Să notăm cu B matricea formată din coeficienții acestor variabile în tabelul iterației 0 și să arătăm că inversa acestei matrice este matricea formată din coeficienții variabilelor artificiale $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ în tabelul iterației k. Pentru aceasta să considerăm un sistem de restricții transformate în ecuații prin adăugarea variabilelor de abatere scris sub formă matricială:

$$Ax + E\xi = d, \tag{I.3.23}$$

unde A este o matrice $m \times n$ dimensională de rang m, E matricea unitate de ordin m și ξ vectorul format din variabilele de abatere. Fie x_B vectorul format de variabilele din bază din iterația k, B matricea coeficienților acestor variabile în ecuația (I.3.23) și R matricea formată din elementele matricei A care nu aparține lui B. Avem

$$A = (B, R); \quad x = [x^B, x^R]. \tag{I.3.24}$$

Sistemul (I.3.23), cu aceste notații, se scrie

$$(B, R) \quad [x^B, x^R] + E\xi = d \tag{I.3.25}$$

sau

$$Bx^B + Rx^R + E\xi = d. \tag{I.3.26}$$

Înmulțind la stînga ecuația (I.3.26) cu B^{-1} avem

$$B^{-1}Bx^B + B^{-1}Rx^R + B^{-1}E\xi = B^{-1}d. \tag{I.3.27}$$

Ecuația (I.3.27) dă soluția de bază din iterația k pentru $x^R = 0$; $\xi = 0$ și dovedește că:

— inversa bazei, B^{-1}, este matricea formată din coeficienții variabilelor artificiale, deoarece $B^{-1}E = B^{-1}$;

— matricea asociată variabilelor structurale care nu aparține bazei se obține înmulțind inversa bazei B^{-1} cu matricea R asociată acestor variabile în sistemul original;

— matricea asociată variabilelor din bază este matricea unitate, deoarece $B^{-1}B = E$.

Același raționament se aplică și sistemelor care se obțin adăugînd z-ecuația sistemului format de restricții sau ecuațiile în z și w, prin urmare se poate afirma că:

— dacă B este matricea formată din coeficienții variabilelor $x_{j_1} \ldots, x_{j_m}$ în iterația 0 (sistemul inițial), inversa B^{-1} este matricea formată din coeficienții variabilelor $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ în iterația k, adică

$$B^{-1} = [g_{i,\ n+j}]; \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{matrix}; \tag{I.3.28}$$

Scanned with OKEN Scanner

— dacă B^* este matricea formată din coeficienţii variabilelor $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}, z, w$ în iteraţia 0, inversa ei $(B^*)^{-1}$ este matricea formată din coeficienţii variabilelor $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}, z, w$ în iteraţia k.

Dacă se cunoaşte B^{-1}, inversa bazei din iteraţia k, toate elementele tabelului acestei iteraţii pot fi calculate folosind numai tabelul iteraţiei 0 şi B^{-1}. Astfel:

1° Un element g_{rs} din tabelul iteraţiei k, conform formulei (I.3.2), este

$$g_{rs} = \beta_{r1} a_{1s} + \beta_{r2} a_{2s} + \ldots + \beta_{rm} a_{ms}, \qquad \text{(I.3.29)}$$

unde β_{ri} sînt elementele liniei r din B^{-1}, deci

$$\beta_{ri} = g_{r,\, n+i}; \quad i \in M. \qquad \text{(I.3.30)}$$

Formula (I.3.29) arată că elementul din linia r şi coloana s este dat de produsul scalar al liniei r din B^{-1} cu coloana s din tabelul iniţial.

2° Similar, $\bar{c}_j$ şi $\bar{a}_{0j}$ se calculează făcînd produsele scalare dintre liniile z respectiv w din $[B^*]^{-1}$ şi coloana j din tabelul iniţial. Avem

$$\bar{c}_j = (\bar{c}_{n+1} a_{1j} + \bar{c}_{n+2} a_{2j} + \ldots + \bar{c}_{n+m} a_{mj}) - c_j, \qquad \text{(I.3.31)}$$

$$\bar{a}_{0j} = (\bar{a}_{0,\, n+1} a_{1j} + \bar{a}_{0,\, n+2} a_{2j} + \ldots + \bar{a}_{0,\, n+m} a_{mj}) - a_{0j}. \qquad \text{(I.3.32)}$$

Pe de altă parte, în baza definiţiei multiplicatorilor simplex, coeficienţii z-ecuaţiei şi ai ecuaţiei w din iteraţia k sînt daţi de egalităţile

$$\bar{c}_j = (\pi_1 a_{1j} + \pi_2 a_{2j} + \ldots + \pi_m a_{mj}) - c_j, \qquad \text{(I.3.33)}$$

$$\bar{a}_{0j} = (\sigma_1 a_{1j} + \sigma_2 a_{2j} + \ldots + \sigma_m a_{mj}) - a_{0j}, \qquad \text{(I.3.34)}$$

în care se notează cu π_i şi σ_i; $i \in M$ multiplicatorii simplex ai acestor ecuaţii. Formulele (I.3.31) şi (I.3.33) sînt identice dacă se dovedeşte că

$$\pi_i = \bar{c}_{n+i}; \qquad i \in M.$$

De asemenea arătăm că formulele (I.3.32) şi (I.3.34) sînt identice, dovedind că

$$\sigma_i = \bar{a}_{0,\, n+i}; \qquad i \in M.$$

Aceste egalităţi se vor demonstra în cele ce urmează.

Din (I.3.31) şi (I.3.32) se constată că coeficienţii z-ecuaţiei şi ai ecuaţiei w sînt diferenţele $z_j - c_j$ şi respectiv $w_j - a_{0j}$, care, în algoritmul simplex primal, sînt utilizate pentru determinarea vectorului care intră în bază.

Scanned with OKEN Scanner

3° Calculul valorilor $\bar{z}_0$ și $\bar{w}_0$ se face similar cu al mărimilor $\bar{c}_j$ și $\bar{a}_{0j}$, astfel:

$$\bar{z}_0 = \bar{c}_{n+1}\, d_1 + \bar{c}_{n+2}\, d_2 + \ldots + \bar{c}_{n+m}\, d_m, \tag{I.3.35}$$

$$\bar{w}_s = \bar{a}_{0,\,n+1}\, d_1 + \bar{a}_{0,\,n+2}\, d_2 + \ldots + \bar{a}_{0,\,n+m}\, d_m - w_0, \tag{I.3.36}$$

adică $\bar{z}_0$ este produsul scalar dintre linia z a matricei $(B^*)^{-1}$ și coloana constantelor, d din tabelul inițial, iar $\bar{w}$ este produsul scalar dintre linia w a matricei $(B^*)^{-1}$ și coloana constantelor d din tabelul inițial.

Folosind multiplicatorii simplex, $\bar{z}_0$ și $\bar{w}_0$ sînt

$$\bar{z}_0 = \pi_1 d_1 + \pi_2 d_2 + \ldots + \pi_m\, d_m, \tag{I.3.37}$$

$$\bar{w}_s = \sigma_1 d_1 + \sigma_2 d_2 + \ldots + \sigma_m\, d_m - w_0. \tag{I.3.38}$$

Echivalența grupurilor de formule (I.3.35) — (I.3.37) și (I.3.36) — (I.3.38) se stabilește numai în cazul în care se arată că

$$\pi_i = \bar{c}_{n+i} \quad \text{și} \quad \sigma_i = \bar{a}_{0,\,n+i} \quad \text{pentru } i \in M.$$

Teoremă: *Multiplicatorii simplex corespunzători unei iterații date sînt unic determinați și egali cu coeficienții variabilelor artificiale în ecuația z (sau w) a iterației respective.*

Demonstrație. Pentru a dovedi că $\pi_i = \bar{c}_{n+i}$ în iterația k, folosim definiția multiplicatorilor simplex. Variabilele din bază în iterația k sînt $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$. Coeficienții acestor variabile în z-ecuația inițială sînt $-c_{j_1}, \ldots, -c_{j_m}$. Multiplicatorii simplex sînt numerele $\pi_1, \ldots, \pi_m$ cu care înmulțind fiecare ecuație a sistemului inițial și adunînd z-ecuația inițială să obținem o z-ecuație în care variabilele din bază $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ au coeficienți nuli.

Coeficientul variabilei x_{j_s}; $s \in I$, în ecuația astfel construită, este

$$\pi_1\, a_{1j_s} + \pi_2\, a_{2j_s} + \ldots + \pi_m\, a_{mj_s} - c_{j_s} = 0. \tag{I.3.39}$$

Condiția (I.3.39) trebuie satisfăcută pentru toate variabilele din bază, deci numerele π_i sînt soluții ale sistemului

$$\begin{aligned}
&\pi_1 a_{1j_1} + \pi_2 a_{2j_1} + \ldots + \pi_m\, a_{mj_1} = c_{j_1},\\
&\pi_1\, a_{1j_2} + \pi_2\, a_{2j_2} + \ldots + \pi_m\, a_{mj_2} = c_{j_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\pi_1 a_{1j_m} + \pi_2\, a_{2j_m} + \ldots + \pi_m\, a_{mj_m} = c_{j_m},
\end{aligned} \tag{I.3.40}$$

care se scrie matricial sub forma

$$\widetilde{B}\,\widetilde{\pi} = c_{B^*} \tag{I.3.41}$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă s-a notat cu c_B vectorul format de coeficienții variabilelor $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ în z-ecuația inițială, cu $\widetilde{B}$ transpusa matricei B și cu $\widetilde{\pi}$ vectorul coloană cu componentele $\pi_1, \ldots, \pi_m$. Ecuația (I.3.41) este echivalentă cu

$$\pi B = c_B, \tag{I.3.42}$$

în care π este vectorul-linie format din multiplicatorii simplex. Soluția ecuației (I.3.42) este

$$\pi = c_B B^{-1}. \tag{I.3.43}$$

Produsele scalare dintre vectorul-linie c_B și vectorii-coloană ai matricei B^{-1} sînt coeficienții z-ecuației în iterația k, deci

$$\pi = (\bar{c}_{n+1}, \ldots, \bar{c}_{n+m}) \text{ sau } \pi_i = \bar{c}_{n+i}; \quad i \in M. \tag{I.3.44}$$

Vectorul π este unic determinat, deoarece soluția ecuației (I.3.43) este unică, fiindcă inversa oricărei matrice, dacă există, este unică. Demonstrația pentru $\sigma_i = \bar{a}_{0,n+i}$ este analogă celei anterioare.

4. Algoritmul metodei simplex revizuită

Pentru determinarea soluției optime a unei probleme de programare liniară prin această metodă se scrie modelul problemei sub forma (I.3.17), (I.3.18), (I.3.19) sau schematic sub forma tabelului iterației 0 din § 3.

În prima fază a aplicării algoritmului se caută soluția sistemului restricțiilor pentru care $w = 0$. În acest scop:

1° se alege $a_{ok} = \max_{j \in N} a_{oj}$; vectorul atașat variabilei x_k intră în bază;

2° se calculează $\frac{d_s}{a_{sk}} = \min_{i \in M} \left\{ \frac{d_i}{a_{ik}}, \; a_{ik} > 0 \right\}$; variabila x_s iese din bază;

3° se calculează componentele vectorilor atașați variabilelor artificiale (inversa bazei), folosind aceeași regulă ca în algoritmul simplex primal;

4° se calculează elementele liniei w cu ajutorul formulei

$$\bar{a}_{0j} = \sigma_1 a_{1j} + \sigma_2 a_{2j} + \ldots + \sigma_m a_{mj} - a_{oj}; \quad j \in N;$$

Scanned with OKEN Scanner

5° se determină noul vector care intră în bază și se calculează componentele acestui vector cu formulele

$$g_{rs} = \beta_{r1}\, a_{1s} + \beta_{r2}\, a_{2s} + \ldots + \beta_{rm}\, a_{ms} ;$$

6° se reia aplicarea algoritmului de la punctul 1°.

Prima fază se încheie atunci cînd în linia w nu mai avem nici o valoare pozitivă. Soluția obținută poate fi:

– soluția inițială pentru faza a doua, dacă baza optimă nu include nici o variabilă artificială cu valoare nenulă; sau, în caz contrar,

– dovada că problema inițială nu admite soluții.

În faza a doua se urmărește determinarea soluției care optimizează funcția obiectiv. Pentru aceasta se calculează elementele liniei z în baza iterației finale a fazei I și se aplică aceleași reguli de calcul ca în prima fază, cu deosebire că:

– valorile care determină intrarea unui vector în bază sînt acele din linia z;

– multiplicatorii simplex σ_i se înlocuiesc cu π_i.

Exemplul II. Să se rezolve prin metoda simplex revizuită problema de programare liniară cu următorul model:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 &= 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 2x_5 &= 8, \qquad (I.3.45) \\ x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 &= 19; \end{aligned}$$

$$\min z = 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5. \qquad (I.3.46)$$

Rezolvare. Pentru construirea iterației 0 se transformă inecuațiile (I.3.45) în ecuații, prin adăugarea variabilelor artificiale x_6, x_7 și x_8; se înlocuiește funcția obiectiv cu z-ecuația și se construiește ecuația w adunînd ecuațiile sistemului (I.3.45) și înlocuind suma variabilelor de abatere cu w, deci avem:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 + x_6 &= 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 2x_5 + x_7 &= 8, \\ x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 + x_8 &= 19, \qquad (I.3.47) \\ -5x_1 + 6x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 + z &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 + w &= 31. \end{aligned}$$

Coeficienții sistemului (I.3.47) sînt elementele tabelului iterației 0.

Scanned with OKEN Scanner

Iterația 0

(12)

Variabile din bază	Variabile de structură					Variabile artificiale					Constante
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	w	d
x_6	2	−3	−1	4	1	1					4
x_7	1	1	2*	−8	2		1				8
x_8	0	1	3	5	1			1			19
z	−5	6	−3	−1	−2				1		0
w	3	−1	4	1	4					1	31

În prima fază trebuie determinate valorile variabilelor care satisfac sistemul (I.3.45) și minimizează w, deci soluția nu este optimă dacă în linia w există valori pozitive. În tabelul de mai înainte, astfel de valori corespund variabilelor x_1, x_3, x_4 și x_5; criteriul de intrare în bază indică introducerea în bază a variabilei x_3 sau x_5. Dacă alegem pe x_3, elementul de soluție este acel marcat cu asterisc în tabelul iterației 0.

Se calculează inversa bazei, adică vectorii atașați variabilelor x_6, x_7, x_8, z, w, și vectorul constantelor. Elementele din linia w, necesare pentru a constata dacă noua soluție este optimă, se calculează cu formula

$$\overline{d}_j = \sigma_1 a_{1j} + \sigma_2 a_{2j} + \ldots + \sigma_m a_{mj} - d_j$$

sau cu *regula practică I*; *se copiază elementele ultimei linii w din matricea inversă, vertical pe o foaie de hîrtie, și se însumează produsele acestor numere cu componentele fiecărei coloane din tabelul inițial.* Astfel avem

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{matrix} \Rightarrow 1; \quad \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \end{matrix} \Rightarrow -3; \quad \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{matrix} \Rightarrow 0; \quad \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 \\ -8 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \Rightarrow 17; \quad \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{matrix} \Rightarrow 0.$$

Cu aceste valori se construieşte tabelul iteraţiei 1, din care se constată că soluţia găsită nu este optimă şi poate fi îmbunătăţită dacă intră în bază variabila x_4.

Iteraţia 1 — faza I

(13)

Variabile din bază	Variabile de structură					Variabile artificiale					Constante
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	w	d
x_6				0		1	1/2	0			8
$\rightarrow x_3$				— 4		0	1/2	0			4
x_8				17*		0	−3/2	1			7
z				−13		0	3/2	0	1		12
w	1	−3	0	17	0	0	−2	0		1	15

Se calculează componentele vectorului ataşat acestei variabile, cu formulele (I.3.29) sau cu *regula practică II*: *se copiază pe o hîrtie orizontal elementele situate în coloana* x_j *din iteraţia* 0 *şi se însumează produsele acestor numere cu elementele fiecărei linii a matricei inverse din iteraţia 1*. În acest exemplu $x_j = x_4$ şi avem

4	−8	5	−1	1
1	1/2	0	0	0 → 0
0	1/2	0	0	0 → −4
0	−3/2	1	0	0 → 17
0	3/2	0	1	0 → −13

Acum, fiind cunoscute elementele vectorului care intră în bază, se determină elementul de soluţie şi se construiesc în mod asemănător celelalte iteraţii.

În iteraţia 3 se obţine $w = 0$ şi cu aceasta se încheie prima fază, care oferă soluţia iniţială pentru optimizarea funcţiei obiectiv a problemei originale.

Scanned with OKEN Scanner

Iteraţiile 2 şi 3 — faza I

(14)

Iteraţia	Variabile din bază	Variabile de structură					Variabile artificiale					Constante
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	z	w	d
2	$\leftarrow x_6$	5/2*					1	1/2	0			8
	x_3	5/34					0	5/34	4/17			96/17
	$\rightarrow x_4$	−3/34					0	−3/34	1/17			7/17
	z						0	−6/17	13/17	1		295/17
	w	5/2	−5/2	0	0	2	0	−1/2	−1		1	8
3	$\rightarrow x_1$		1				2/5	1/5	0			16/5
	x_3		9/17*				−1/17	2/17	4/17			88/17
	x_4		−2/17				3/85	−6/85	1/17			59/85
	z	0	42/17	0	0	271/85	185/85	109/85	13/17	1		2739/85
	w	0	0	0	0	0	−1	−1	−1		1	0

În faza II a aplicării algoritmului se urmăreşte determinarea soluţiei care minimizează funcţia z. Trebuie văzut dacă soluţia optimă a fazei I satisface condiţiile de optimalitate pentru obiectivul min z. În acest scop se calculează preţurile comparative, adică coeficienţii z-ecuaţiei din iteraţia 3 cu formula

$$\bar{c}_j = \pi_1 a_{1j} + \pi_2 a_{2j} + \ldots + \pi_m a_{mj} - c_j$$

sau aplicînd regula practică I. Avem

$$\begin{vmatrix} 158/85 & 2 \\ 109/85 & 1 \\ 13/17 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \Rightarrow 0; \quad \begin{vmatrix} 158/85 & -3 \\ 109/85 & 1 \\ 13/17 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{42}{17} \begin{vmatrix} 158/85 & -1 \\ 109/85 & 2 \\ 13/17 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow 0 \quad \begin{vmatrix} 158/85 & 4 \\ 109/85 & -8 \\ 13/17 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow 0 \quad \begin{vmatrix} 158/85 & 1 \\ 109/85 & 2 \\ 13/17 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{271}{85}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste valori se înscriu în linia z a tabelului optim din faza I (iteraţia 3).

Soluţia este optimă dacă în linia z nu există nici o valoare pozitivă. În exemplul dat, preţurile comparative pentru x_2 şi x_5 sînt pozitive, deci soluţia se îmbunătăţeşte prin intrarea variabilei x_2 în bază.

Se calculează elementele din coloana x_2 şi se determină elementul de soluţie. În iteraţiile fazei II nu mai este necesară linia w.

Iteraţiile fazei II

(15)

Variabile din bază	Variabile de structură					Variabile artificiale			z	Constante
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
$\leftarrow x_1$					71/45*	13/45	19/45	4/9		584/45
x_2					7/9	−1/9	2/9	4/9		88/9
x_4					2/45	1/45	−2/45	1/9		83/45
z	0	0	−14/3	0	19/45	32/15	11/15	−1/3	1	363/45
x_5						13/71	19/71	20/71		584/71
x_2						−18/71	1/71	16/71		240/71
x_4						1/71	−4/71	7/71		105/71
z	−57/71	0	−439/71	0	0	135/71	28/71	−49/71	1	−167/71

Soluţia găsită este optimă. Elementele rămase necalculate în iteraţiile celor două faze ne dau posibilitatea să evaluăm economia de muncă realizată prin aplicarea metodei simplex revizuite în locul simplexului primal sau metodei în două faze. *În cele cinci iteraţii necesare determinării soluţiei optime nu a fost necesar calculul a 71 din cele 189 elemente pe care le-ar fi conţinut aceleaşi iteraţii în cadrul celorlalte metode de rezolvare, deci calculele s-au redus cu circa 37% la un model cu dimensiunile* 3×5.

5. Compararea metodelor simplex revizuită şi primală

Pentru a stabili analogia dintre aceste metode trebuie arătat că criteriul de intrare în bază a rămas acelaşi. În metoda simplex primală, aplicată unei probleme de maxim, un vector a_j candidează la

Scanned with OKEN Scanner

intrarea în bază în iterația k dacă acesta corespunde unei diferențe $z_j - c_j < 0$ și alegerea se oprește asupra vectorului a_s pentru care

$$|z_s - c_s| = \max_{j \in J} |z_j - c_j|.$$

În metoda simplex revizuită, vectorii a_j candidează la intrarea în bază în iterația k dacă aceștia corespund unei valori $\bar{c}_j < 0$ și alegerea se oprește asupra vectorului a_k pentru care

$$|\bar{c}_s| = \max_{j \in J} |\bar{c}_j|.$$

Pentru a stabili identitatea criteriilor de alegere a vectorului care intră în bază trebuie arătat că

$$z_j - c_j = \bar{c}_j.$$

În simplexul primal avem

$$z_j = c_B g_j,$$

unde c_B este vectorul-linie format de coeficienții variabilelor bazei B a iterației k, iar

$$g_j = B^{-1} a_j,$$

deci:

$$z_j - c_j = c_B B_k^{-1} a_j - c_j = \pi a_j - c_j,$$

fiindcă din (I.3.43) avem $\pi = c_B B^{-1}$.

Pe de altă parte, numerele $\bar{c}_j$ în metoda simplex revizuită sînt date de formulele

$$\bar{c}_j = (\pi_1 a_{1j} + \pi_2 a_{2j} + \ldots + \pi_m a_{mj}) - c_j = \pi a_j - c_j,$$

ceea ce dovedește identitatea criteriilor.

Din punctul de vedere al volumului de calcule, metoda simplex aplicată unui model în forma standard cu dimensiunile $m \times n$ cere pentru fiecare iterație un număr de operații egal cu

$$\{(n - m) + 1\}(m + 1) - (n - 2m)(m + 1) - (m + 1)^2.$$

Metoda simplex revizuită, pentru un model de aceleași dimensiuni, cere în fiecare iterație un număr de operații egal cu

$$t(n - m)(m + 1) + tm(m + 1) + (m + 1)^2 = tn(m + 1) + (m + 1)^2,$$

dacă t este numărul coeficienților diferiți de zero în tabelul iterației 0.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care

$$t < 1 - \frac{2m}{n},$$

numărul calculelor cerute de metoda simplex revizuită este mai mic decît al celor cerute de simplexul primal.

6. Tabele utilizate în metoda simplex revizuită

Metoda multiplicatorilor foloseşte de obicei alt model de prezentare a iteraţiilor decît simplexul primal.

După ce se construieşte tabelul coeficienţilor sistemului se formează tabelele iteraţiilor care conţin următoarele coloane:

a) numele variabilelor bazice;

b) vectorii artificiali (inversa bazei);

c) vectorii z şi w (valoarea funcţiei obiectiv şi a sumei variabilelor artificiale);

d) constantele (soluţia).

Fiecărui tabel i se ataşază o coloană care cuprinde componentele vectorului care intră în bază, deci această coloană diferă de la o iteraţie la alta.

Factorii relativi de cost se consemnează într-un tabel suplimentar în care se marchează cu un asterisc elementul care determină intrarea unui vector în bază.

Tabelele folosite în aplicarea metodei multiplicatorilor sînt:

Tabelul coeficienţilor sistemului original

(16)

Ecuaţia	Variabile de structură				Variabile artificiale					Constante
i	x_1	x_2	$\dots$	x_j $\dots$ x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+m}	z w	d_i
1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1j} $\dots$ a_{1n}	1					d_1
2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2j} $\dots$ a_{2n}		1				d_2
$\cdot$	$\cdot$									$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$									$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$									$\cdot$
m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mj} $\dots$ a_{mn}				1		d_m
z	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_j$ $\dots$ $-c_n$	0	0	$\dots$	0	1	0
w	$-a_{01}$	$-a_{02}$	$\dots$	$-a_{0j}$ $\dots$ $-a_{0n}$	0	0	$\dots$	0	1	$\sum_{i=1}^{m} d_i$

$$a_{0j} = -\sum_{i \in M} a_{ij}\,;\ d_i \geqslant 0 \text{ pentru toţi } i \in M.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul iterației 0

(17)

Variabile din bază	x_{n+1} . . . x_{n+m}	z	w	Constante
x_{n+1}	1			d_1
.	.			.
.	.			.
.	.			.
x_{n+r}	1			d_r
.	.			.
.	.			.
.	.			.
x_{n+m}	1			d_m
z		1		0
w			1	$\sum d_i$

Tabelul iterației k

(18)

Variabile din bază	Inversa bazei x_{n+1} . . . . . x_{n+m}	z	w	Constante	x_s
x_{j_1}	β_{11} . . . . . β_{1m}			$\bar{d}_1$	$g_{1s} = \sum_{i \in M} \beta_{1i}\, a_{is}$
.					.
.					.
.					.
x_{j_r}	β_{r1} β_{rm}			$\bar{d}_r$	$g_{rs} = \sum_{i \in M} \beta_{ri}\, a_{is}$
.					.
.					.
.					.
x_{j_m}	β_{m1} β_{mm}			$\bar{d}_m$	$g_{ms} = \sum_{i \in M} \beta_{mi}\, a_{is}$
z	π_1 . . . . . π_m	1		$\bar{z}_0$	$\pi_s = \sum_{i \in M} \pi_i\, a_{is} - c_s$
w	σ_1 . . . . . σ_m		1	$\bar{w}_0$	$\bar{a}_{0s} = \sum_{i \in M} \sigma_i\, a_{is} - a_{0s}$

$$\beta_{jk} = g_{j,\,n+k}\,; \qquad \pi = \bar{c}_{n+k}\,; \qquad \sigma_k = \bar{a}_{0,\,n+k}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notă. Coloana x_s la începutul iterației k nu este completată. Ea se completează după ce s-a determinat variabila x_s care intră în baza iterației $(k+1)$.

Tabelul factorilor relativi de cost

(19)

Iterația	Variabile									
	1	2	. . . . .	n	. . .	$n+1$	. . . . .	$n+m$		
Faza I: 0, 1, ., ., ., k	$-a_{01}$	$-a_{02}$	. . . . .	$-a_{0n}$		0	. . . . .	0		
Folosim σ_i în faza I; π_i în faza II	din tabelul iterației corespunzătoare									
Faza II: k, $k+1$, ., ., .	Calculăm $\bar{a}_{0j} = \sum_{i \in M} \sigma_i a_{ij} - a_{0j}$; $\bar{c}_j = \sum_{i \in M} \pi_i a_{ij} - c_j$									se înscriu valorile în linia corespunzătoare iterației și se marchează cu asterisc coloana variabilei care intră în bază

Vom reda acum tabelele iterațiilor pentru exemplul II rezolvat în § 3, punctul 4 sub forma indicată anterior.

Tabelul coeficienților sistemului

(20)

Ecuația	Variabile de structură					Variabile artificiale			z	w	Constante
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8			
1	2	−3	−1	4	1	1					4
2	1	1	2	−8	2		1				8
3	0	1	3	5	1			1			19
z	−5	6	−3	−1	−2				1		0
w	3	−1	4	1	4					1	31

Scanned with OKEN Scanner

Factorii relativi de cost

(21)

Ciclul		Variabile								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
$\bar{a}_{0j}$	0	3	1	4*	1	4	0	0	0	
	1	1	−3	0	17*	0	0	−2	0	
	2	5/2*	−5/2	0	0	2	0	−1/2	−1	
	3	0	0	0	0	0	−1	−1	−1	Sfîrşitul fazei I
$\bar{c}_j$	3	0	42/17*	0	0	271/85	158/85	109/85	13/17	
	4	0	0	−14/3	0	19/45*	Eliminat			
	5	−53/71	0	−439/71	0	0	,,			Sfîrşitul fazei II

Tabelul factorilor relativi de cost se completează pe măsura construirii iteraţiilor şi se foloseşte pentru marcarea variabilei care intră în bază.

Iteraţia 0

Variabile din bază	Inversa bazei			z	w	Constante	$x_5 = x_3$
	x_6	x_7	x_8				
x_6	1					4	−1
x_7		1				8	2*
x_8			1			19	3
z				1		0	−3
w					1	31	4

Scanned with OKEN Scanner

Iterația 1

(22)

$x_s = x_4$

x_6	1	1/2			8	0
x_3		1/2			4	−4
x_8		−3/2	1		7	17*
z		3/2		1	12	−13
w		−2		1	15	17

Iterația 2

(23)

$x_s = x_1$

x_6	1	1/2	0		8	5/2*
x_3		5/34	4/17		96/17	5/34
x_4		−3/34	1/17		7/17	−3/34
z		6/17	13/17	1	295/17	−79/17
w		−1/2	−1	1	8	5/2

Iterația 3

(24)

$x_s = x_2$

x_1	2/5	1/5	0		16/5	−1
x_3	−1/17	2/17	4/17		88/17	9/17*
x_4	3/85	−6/85	1/17		59/85	−2/17
z	158/85	109/85	13/17	1	2739/85	
w	−1	−1	−1	1	0	

Se încheie faza I fiindcă $w = 0$

Scanned with OKEN Scanner

Iteraţia 4

(25)

$x_s = x_5$

x_1	13/45	19/45	4/9		584/45	71/45*
x_2	−1/9	2/9	4/9		88/9	7/9
x_4	1/45	−2/45	1/9		83/45	2/45
z	32/15	11/15	−1/3	1	121/15	19/45

Iteraţia 5

(26)

x_5	13/71	19/71	20/71		584/71
x_2	−18/71	1/71	16/71		240/71
x_4	1/71	−4/71	7/71		105/71
z	135/71	28/71	−49/71	1	−167/71

Soluţia este optimă deoarece tabelul factorilor relativi de cost nu mai conţine valori pozitive în iteraţia 5.

Acest mod de prezentare, evident, nu diminuează numărul calculelor necesare dar constituie o prezentare mai restrînsă a iteraţiilor, eliminînd spaţiile goale care apar în tabelele primei variante. Transpunerea problemei în această formă pe o maşină electronică nu mai blochează inutil un mare număr de elemente ale maşinii.

7. Inversa unei matrice sub formă de produs de matrice

Pentru a găsi modalitatea de a scrie inversa unei matrice sub formă de produs de matrice se rezolvă următoarea problemă: fiind dată o matrice $m \times n$ dimensională

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots, a_n) \tag{I.3.48}$$

care admite o inversă A^{-1} şi o matrice A^* care diferă de A printr-un singur vector, se poate găsi $(A^*)^{-1}$ folosind A^{-1}?

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a preciza ideile să admitem că A^* se obține înlocuind vectorul a_r din A printr-un vector b_r, deci

$$A^* = (a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, b_r, a_{r+1}, \ldots, a_n) \tag{I.3.49}$$

Matricea A^* admite inversa dacă și numai dacă vectorii care o formează sînt liniar independenți, adică formează o bază în R_n. Vectorul b_r poate fi scris în baza formată de vectorii matricei A. Acești vectori formează o bază deoarece există A^{-1}. Avem

$$b_r = AG = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots + a_r g_r + \ldots + a_n g_n, \tag{I.3.50}$$

unde $g_r \neq 0$ dacă A^* admite inversă. Din egalitatea (I.3.50) rezultă

$$a_r = -\frac{g_1}{g_r} a_1 - \frac{g_2}{g_r} a_2 - \ldots - \frac{g_{r-1}}{g_r} a_{r-1} + \frac{1}{g_r} b_r - \frac{g_{r+1}}{g_r} a_{r+1} - \ldots - \frac{g_n}{g_r} a_n. \tag{I.3.51}$$

Egalitatea (I.3.51) dă expresia vectorului a_r în baza formată de vectorii matricei A^*. Pe de altă parte, putem scrie

$$a_r = A^* G^* = a_1 g_1^* + a_2 g_2^* + \ldots + a_{r-1} g_{r-1}^* + b_r g_r^* + a_{r+1} g_{r+1}^* + \ldots + a_n g_n \tag{I.3.52}$$

Deoarece expresia unui vector într-o bază dată este unică, din (I.3.51) și (I.3.52) rezultă că

$$G^* = \left[-\frac{g_1}{g_r}, -\frac{g_2}{g_r}, \ldots, -\frac{g_{r-1}}{g_r}, \frac{1}{g_r}, -\frac{g_{r+1}}{g_r}, \ldots, \frac{g_n}{g_r} \right]. \tag{I.3.53}$$

Pe de altă parte, produsul unei matrice printr-un vector unitar de ordinul r este egal cu al r-lea vector-coloană al matricei.

Această observație justifică următoarea expresie a vectorului G^*:

$$G^* = (e_1, e_2, \ldots, e_{r-1}, G^*, e_{r+1}, \ldots, e_n) e_r = E_{r*}^{(n)} e_r. \tag{I.3.54}$$

Deci vectorul G^* este produsul dintre $E_{r*}^{(n)}$ — matricea—unitate de ordinul n în care vectorul e_r s-a înlocuit cu G^* — și vectorul e_r. De asemenea, aceeași observație justifică egalitatea

$$a_r = A e_r. \tag{I.3.55}$$

Scanned with OKEN Scanner

Egalînd valorile lui a_r din (I.3.55) și (I.3.52), în care G^* se înlocuiește cu valoarea dată de (I.3.54), avem

$$Ae_r = A^* E_{r*}^{(n)} e_r \tag{I.3.56}$$

sau

$$A = A^* E_{r*}^{(n)}. \tag{I.3.57}$$

Înmulțind egalitatea (I.3.57) la stînga cu $(A^*)^{-1}$ găsim

$$(A^*)^{-1} A = E_{r*}^{(n)}. \tag{I.3.58}$$

Înmulțind această ultimă relație la dreapta cu A^{-1} rezultă că inversa matricei A^* este

$$(A^*)^{-1} = E_{r*}^{(n)} A^{-1}. \tag{I.3.59}$$

În concluzie, pentru a calcula inversa matricei A^* care se construiește înlocuind în matricea A vectorul a_r prin b_r se calculează:

1° vectorul $G = (g_1, g_2, \ldots, g_n) = A^{-1} b_r$;

2° se formează vectorul

$$G^* = \left(-\frac{g_1}{g_r}, -\frac{g_2}{g_r}, \ldots, \frac{g_{r-1}}{g_r}, \frac{1}{g_r}, -\frac{g_{r+1}}{g_r}, \ldots, -\frac{g_n}{g_r} \right);$$

3° se scrie matricea unitate de ordinul n în care vectorul e_r este înlocuit prin G^* și se notează această matrice cu $E_{r*}^{(n)}$;

4° se aplică formula (I.3.59).

Exemplul III. Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

a cărei inversă este

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5/2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

și se cere să se calculeze inversa matricei A^*, obținută înlocuind în A vectorul $a_2 = [0, 2, 4]$ prin $b_2 = [-1, -5, 2]$, folosind A^{-1}.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculăm

$$G = A^{-1} b_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5/2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -25/2 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Deoarece b_2 înlocuiește pe a_2 în matricea A

$$g_r = g_2 = -25/2,$$

$$G^* = [4/5\,; \quad -2/25\,; \quad 22/25],$$

iar

$$E_{2^*}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 & 0 \\ 0 & -2/25 & 0 \\ 0 & 22/25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicînd formula (I.3.59) găsim

$$(A^*)^{-1} = E_{2^*}^{(3)} A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4/5 & 0 \\ 0 & -2/25 & 0 \\ 0 & 22/25 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5/2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & 1/5 \\ 4/25 & -1/5 & 2/25 \\ -19/25 & 1/5 & 3/25 \end{bmatrix}.$$

Fie dată acum o matrice $n \times n$ dimensională $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ care admite inversă. Pentru a exprima A^{-1} sub formă de produs de matrice se construiește succesiunea de matrice

$$A_1 = (a_1, e_2, e_3, \ldots, e_n),$$

$$A_2 = (a_1, a_2, e_3, \ldots, e_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = A.$$

Matricea A_1 se formează înlocuind în matricea-unitate de ordinul n, $E^{(n)}$, vectorul e_1 prin a_1; A_2 se formează înlocuind în A_1 vectorul e_2 prin a_2 etc., deci fiecare dintre matricele succesiunii diferă de precedenta printr-un singur vector, iar $A_n = A$.

Scanned with OKEN Scanner

Inversele acestor matrice, conform formulei (I.3.59), sînt:

$$A_1^{-1} = E_1^{(n)}(E^n)^{-1} = E_1^{(n)},$$
$$A_2^{-1} = E_2^{(n)} \cdot A_1^{-1} = E_2^{(n)} \cdot E_1^{(n)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \text{(I.3.60)}$$
$$A_n^{-1} = A^{-1} = E_n^{(n)} \cdot E_{n-1}^{(n)} \ldots E_2^{(n)} \cdot E_1^{(n)}.$$

Formula (I.3.60) dă expresia inversei matricei A sub forma unui produs de matrice, îndeplinind ceea ce ne-am propus la începutul acestui punct. În formula (I.3.60) avem

$$E_i^{(n)} = (e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, G_i^*, e_{i+1}, \ldots, e_n),$$

$$G_i^* = \left[-\frac{g_{i1}}{g_{ii}}, -\frac{g_{i2}}{g_{ii}}, \ldots, -\frac{g_{i,\,i-1}}{g_{ii}}, \frac{1}{g_{ii}}, -\frac{g_{i,\,i+1}}{g_{ii}}, \ldots, -\frac{g_{in}}{g_{ii}}\right]; \qquad \text{(I.3.61)}$$

$$G = [g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{in}] = E_{i-1}^{(n)} E_{i-2}^{(n)} \ldots E_1^{(n)} a_i.$$

Exemplul IV. Să se calculeze inversa matricei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

folosind formula (I.3.60). Notînd cu $a_1, a_2, \ldots, a_5$ vectorii-coloană ai matricei A, avem matricea $A_1 = (a_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, care diferă de matricea-unitate de ordinul cinci, $E^{(5)}$, prin vectorul a_1. Pentru a calcula A_1^{-1} se scrie

$$G_1 = [E^{(5)}]^{-1} a_1 = a_1 = [1, -1, 0, 2, -1].$$

Deoarece a_1 înlocuiește în $E^{(5)}$ pe e_1, elementul folosit pentru a construi pe G_1^* este $g_{11} = 1$, deci avem

$$G_1^* = [1, 1, 0, -2, 1].$$

Scanned with OKEN Scanner

G_1^* înlocuiește vectorul e_1 în $E^{(5)}$ pentru construirea matricei $E_1^{(5)}$ și astfel avem

$$A_1^{-1} = E_1^{(5)}\,[E^{(5)}]^{-1} = E_1^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Formăm acum matricea $A_2 = (a_1, a_2, e_3, e_4, e_5)$ și calculăm

$$G_2 = A_1^{-1} a_2 = E_1^{(5)} a_2 = [0, 1, 0, -1, 1].$$

Elementul folosit pentru a forma pe G_2^* este $g_{22} = 1$, deci $G_2^* = [0, 1, 0, 1, -1]$ și $E_2^{(5)} = (e_1, G_2^*, e_3, e_4, e_5)$, de unde

$$A_2^{-1} = E_2^{(5)}\,E_1^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

În continuare se scrie $A_3 = (a_1, a_2, a_3, e_4, e_5)$ și

$$G_3\,A_2^{-1}\,a_3 = E_2^{(5)}\,E_1^{(5)}\,a_3 = [-1, -1, -2, 2, 1].$$

Pentru a scrie G_3^* se folosește $g_{33} = -2$, deci

$$G_3^* = [-1/2, -1/2, -1/2, 1, 1/2] \text{ și } E_3^{(5)}\,(e_1, e_2, G_3^*, e_4, e_5],$$

iar

$$A_3^{-1} = E_3^{(5)}\,E_2^{(5)}\,E_1^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Următoarea matrice necesară pentru obținerea inversei matricei A este $A_4 = (a_1, a_2, a_3, a_4, e_5)$. Pentru aceasta se calculează

$$G_4 = A_3^{-1} a_4 = E_3^{(5)} E_2^{(5)} E_1^{(5)} a_4 = [0, 1, 0, -1, -1],$$

unde $g_{44} = -1$, deci

$$G_4^* = [0, 1, 0, -1, -1] \text{ iar } E_4^{(5)} = (e_1, e_2, e_3, G_4^*, e_5),$$

deci

$$A_4^{-1} = E_4^{(5)} E_3^{(5)} E_2^{(5)} E_1^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1/2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

În sfîrșit, $A_5 = A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$. Pentru calculul inversei se formează

$$G_5 = A_4^{-1} a_5 = E_4^{(5)} E_3^{(5)} E_2^{(5)} E_1^{(5)} a_5 = [-1, -2, 0, 0, 2]$$

și

$$G_5^* = [1/2, 1, 0, 0, 1/2], \quad \text{deci} \quad E_5^{(5)} = (e_1\, e_2\, e_3\, e_4\, G_5^*),$$

și

$$A_5^{-1} = A^{-1} = E_5^{(5)} E_4^{(5)} E_3^{(5)} E_2^{(5)} E_1^{(5)} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1 & -3/4 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1 & -1/4 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

8. Utilitatea inversei unei matrice sub formă de produs în aplicarea metodei simplex revizuită

La punctul precedent s-a arătat că inversa unei matrice se poate scrie ca un produs de matrice. Această formă a inversei unei baze face inutil calculul explicit al matricei inverse în diferitele iterații ale metodei simplex revizuite. În adevăr, determinarea vectorului care intră în bază în faza I necesită numai cunoașterea valorilor $\bar{a}_{0j}$,

Scanned with OKEN Scanner

iar în faza II a valorilor $\bar{c}_j$. Aceste elemente se pot calcula dacă se cunoaşte :

— pentru $\bar{a}_{0j}$ linia $(m+1)$, adică linia w din inversa bazei ;

— pentru $\bar{c}_j$, linia $(m+2)$, adică linia z din inversa bazei.

Determinarea vectorului care iese din bază necesită cunoaşterea vectorului constantelor în baza iteraţiei studiate şi a vectorului a_k care intră în bază.

Să arătăm că aceste elemente pot fi calculate fără a cunoaşte explicit inversa bazei.

Ne ocupăm în primul rînd de determinarea valorilor $\bar{a}_{0j}$ şi $\bar{c}_j$. Am văzut că pentru calculul acestor valori trebuie cunoscute liniile $(m+1)$ şi $(m+2)$ din inversa bazei. O linie r a unei matrice este egală cu produsul vectorului-linie unitar de ordinul r, cu acea matrice. Notînd cu B_t^{-1} inversa bazei în iteraţia t, linia $(m+1)$ a acestei matrice este $\tilde{e}_{m+1} B_t^{-1}$ dacă se notează cu $\tilde{e}_{m+1}$ vectorul-linie unitar de ordinul $(m+1)$.

Scriind B_t^{-1} sub formă de produs de matrice după formula (I.3.60) avem

$$\tilde{e}_{m+1} B_t^{-1} = \tilde{e}_{m+1} (E_t E_{t-1} \ldots E_1). \qquad \text{(I.3.62)}$$

Produsul (I.3.62) se efectuează înmulţind $\tilde{e}_{m+1}$ cu E_t, rezultatul obţinut cu E_{t-1} etc. Primul produs, pe care îl notăm cu l_0, este a $(m+1)$ linie din E_t. Înmulţind acest vector-linie cu E_{t-1} se obţine un vector-linie pe care să-l notăm cu l_1 ; continuînd efectuarea produselor cu matricele succesiunii se pot stabili care sînt componentele vectorului linie $l_k E_{t-k}$; $t < k < 1$. Astfel avem

$$l_{k+1} = l_k E_{t-k} = (l_{k,1}, l_{k,2}, \ldots, l_{k,m+1})(e_1, e_2, \ldots, G^*_{t-k}, \ldots, e_{m+1}),$$

de unde $l_{k+1,j} = l_{k,j}$ pentru toţi $j \neq t-k$:

$$l_{k+1,\, t-k} = l_k G^*_{t-k} = \sum_{j=1}^{m+1} l_{kj}\, g_{j,\, t-k},$$

deci produsul (I.3.62) se poate calcula inductiv cunoscînd numai indicile coloanei care a ieşit din bază în fiecare din iteraţiile precedente.

Calculul valorilor $\bar{c}_j$ este analog cu cel expus mai înainte, cu singura diferenţă că matricea B_t^{-1} se va înmulţi la stînga cu $\tilde{e}_{m+2}$.

Vectorul constantelor d, în baza iteraţiei t, este dat de produsul $B_t^{-1} d$; analog, a_k este dat de $B_t^{-1} a_k$. Şi aceşti vectori pot fi calculaţi

fără a cunoaște explicit pe B_t^{-1} dacă se folosește formula (I.3.60), pentru a scrie inversa bazei. În adevăr,

$$B_t^{-1} d = (E_t\ E_{t-1} \ldots E_1)d. \tag{I.3.63}$$

Acest produs se efectuează înmulțind pe E_1 cu d. Fie $\bar{d}_1$ vectorul rezultat. Se continuă efectuarea produsului calculînd $E_2\bar{d}_1 = \bar{d}_2$ etc. Să calculăm componentele vectorului $\bar{d}_j = E_j\bar{d}_{j-1}$. Avem

$$\bar{d}_j = E_j\,\bar{d}_{j-1} = (e_1, e_2, \ldots, G_j^*, \ldots, e_{m+2})\,[\bar{d}_{1,j-1}, \bar{d}_{2,j-1}, \ldots, \bar{d}_{m+2,j-1}],$$

de unde

$$\bar{d}_{i,j} = \bar{d}_{i,j-1} + g_{i,j}^*\,\bar{d}_{i,j-1} \qquad \text{pentru toți } i \neq j,$$

$$\bar{d}_{j,j} = g_{jj}^*\,\bar{d}_{j,j-1},$$

deci produsul (I.3.63) se poate calcula inductiv dacă se cunoaște poziția vectorului care intră în baza fiecărei iterații.

În concluzie, pentru aplicarea metodei simplex revizuite nu este necesară cunoașterea explicită a inversei bazei în fiecare iterație; tabelul factorilor relativi de cost se poate construi cunoscînd numai indicii vectorilor care intră în baza diferitelor iterații. Avantajul rezultat nu se valorifică decît în calculul cu mașinile electronice care păstrează în memorie inversele bazelor sub formă de produs și efectuează numai calculele indicate de formulele (I.3.62) și (I.3.63) necesare determinării elementelor folosite pentru aplicarea criteriilor de schimbare a bazei.

§ 4. DUALITATEA ÎN PROGRAMAREA LINIARĂ

1. Definiția problemei duale

Să considerăm problema programării liniare în forma canonică:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n \geqslant d_1,\\
&a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n \geqslant d_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n \geqslant d_m;
\end{aligned} \tag{I.4.1}$$

$$x_j \geqslant 0;\ j \in N = \{1, 2, \ldots, n\}; \tag{I.4.2}$$

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n. \tag{I.4.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin definiţie, duala acestei probleme are următorul model:

$$\begin{aligned} &a_{11}\,u_1 + a_{21}\,u_2 + \ldots + a_{m1}\,u_m \leqslant c_1,\\ &a_{12}\,u_1 + a_{22}\,u_2 + \ldots + a_{m2}\,u_m \leqslant c_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{1n}\,u_1 + a_{2n}\,u_2 + \ldots + a_{mn}\,u_m \leqslant c_n\,; \end{aligned} \tag{I.4.4}$$

$$u_i \geqslant 0 \qquad i \in M = \{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}\,; \tag{I.4.5}$$

$$\max\ v = d_1u_1 + d_2u_2 + \ldots + d_m\,u_m. \tag{I.4.6}$$

Problema (I.4.1)—(I.4.3) se numeşte *problemă primală* şi problema (I.4.4)—(I.4.6), *problemă duală*. Dacă se construieşte duala modelului (I.4.4.)—(I.4.6) considerat ca problemă primală, se regăseşte modelul (I.4.1)—(I.4.3), deci aceste două modele pot fi privite fiecare ca dualul celuilalt. Cuplul problemelor duale în formă canonică se scrie restrîns astfel:

$$I_c \begin{cases} \sum\limits_{j\in N} a_{ij}\,x_j \geqslant d_i\,; \quad i \in M\\ x_j \geqslant 0\,; \quad j \in N\\ \min\ z = \sum\limits_{j\in N} c_j\,x_j \end{cases} \qquad II_c \begin{cases} \sum\limits_{i\in M} a_{ij}\,u_i \leqslant c_j\,; \quad j \in N\\ u_i \geqslant 0\,; \quad i \in M\\ \max\ v = \sum\limits_{i\in M} d_i\,u_i \end{cases}$$

În problema I_c se pot da următoarele interpretări elementelor: x_j reprezintă nivelele la care se desfăşoară activităţile fenomenului economic studiat; d_i — cererea de produse (sau disponibilul de materii prime), iar c_j — costul fiecărei activităţi (sau beneficiul care se realizează din desfăşurarea activităţii). Cu aceste interpretări se poate spune că a rezolva problema I_c înseamnă a determina nivelul fiecărei activităţi x_j; $j \in N$, astfel încît să fie satisfăcute sau depăşite cererile d_i; $i \in M$, iar costul total al activităţilor desfăşurate să fie minim.

Pentru interpretarea problemei II_c vectorului u i se atribuie semnificaţia de vectorul preţurilor unitare ale bunurilor rezultate din desfăşurarea activităţilor, vectorii d şi c păstrînd semnificaţia anterioară. A rezolva problema II_c înseamnă a stabili un sistem de preţuri unitare u_i ale bunurilor $i \in M$ astfel ca valoarea totală a bunurilor consumate în timpul desfăşurării activităţii j la nivel unitar să nu depăşească costul anterior fixat c_j al acestei activităţi, iar valoarea totală a bunurilor create d_i să fie maximă.

Se observă că variabilele duale u_i au acelaşi sens economic cu multiplicatorii simplex π_i folosiţi în metoda revizuită. Mai mult,

Scanned with OKEN Scanner

dacă B este o bază care corespunde unei soluții optime a problemei primale I_c, sistemul

$$u_B B = c_B \tag{I.4.7}$$

din problema duală II_c admite soluția

$$\overline{u}_B = c_B\, B^{-1}, \tag{I.4.8}$$

iar valorile z_j date de formulele (I.2.22) se scriu

$$z_j = c_B\, B^{-1}\, a_j = \sum_{i \in M} \overline{u}_i\, a_{ij}. \tag{I.4.9}$$

Pe de altă parte, din formulele (I.3.43) avem

$$z_j = \sum_{i \in M} \pi_i\, a_{ij}. \tag{I.4.10}$$

Din (I.4.9) și (I.4.10) rezultă că $u_i = \pi_i$; $i \in M$, adică multiplicatorii simplex sînt, în același timp, variabilele problemei duale. Un cuplu de probleme duale sub forma standard se scrie

$$I_s \begin{cases} \sum_{j \in N} a_{ij}\, x_j = d_i\,; & i \in M \\ x_j \geqslant 0\,; & j \in N \\ \min z = \sum_{j \in N} c_j\, x_j \end{cases} \qquad II_s \begin{cases} \sum_{i \in M} a_{ij}\, u_i \leqslant c_j\,; & j \in N \\ u_i \text{ oarecare}\,; & i \in M \\ \max v = \sum_{i \in M} d_i\, u_i \end{cases}$$

Să considerăm, în sfîrșit, forma cea mai generală a unei probleme de programare liniară și duala ei. Vom nota cu M_1 mulțimea restricțiilor cu semnul $\geqslant$, cu $\overline{M}_1$ mulțimea celor cu semnul $=$ și $M_1 \cup \overline{M}_1 = M = \{1, 2, \ldots, m\}$. De asemenea, fie N_1 mulțimea indicilor j care aparțin variabilelor $x_j \geqslant 0$ și $\overline{N}_1$ mulțimea indicilor j care aparțin variabilelor x_j oarecare; $N_1 \cup \overline{N}_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$. Cuplul de probleme duale, sub forma generală, este

$$I \begin{cases} \sum_{j \in N} a_{ij}\, x_j \geqslant d_i\,; & i \in M_1 \\ \sum_{j \in N} a_{ij}\, x_j = d_i\,; & i \in \overline{M}_1 \\ x_j \geqslant 0\,; & j \in N_1 \\ x_j \text{ oarecare}, & j \in \overline{N}_1 \\ \min z = \sum_{j \in N} c_j\, x_j \end{cases} \qquad II \begin{cases} u_i \geqslant 0\,; & i \in M_1 \\ u_i \text{ oarecare} & i \in \overline{M}_1 \\ \sum_{i \in M} a_{ij}\, u_i \leqslant c_j\,; & j \in N_1 \\ \sum_{i \in M} a_{ij}\, u_i = c_j\,; & j \in \overline{N}_1 \\ \max v = \sum_{i \in M} d_i\, u_i \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\overline{M}_1$ și $\overline{N}_1$ sînt mulțimi vide, cuplurile I și II se reduc la cuplul problemelor duale în forma canonică I_c, II_c; dacă M_1 și N_1 sînt mulțimi vide, regăsim cuplul de probleme duale standard I_s, II_s. Perechile de restricții $\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geqslant d_i$, $u_i \geqslant 0$ și $x_j \geqslant 0 \sum_{i \in M} a_{ij} u_i \leqslant$ $\leqslant c_j$ se numesc *restricții duale*; variabilele x_i și u_i se numesc *variabile duale*.

Exemplul I. Dispunem de două sorturi de ulei pe care le notăm cu U_1 și U_2. Conținutul în carbohidrați, vitamine și proteine a fiecărui ulei precum și prețul pe unitate de greutate este dat în tabelul următor:

(27)

Conținutul în unități de:	U_1	U_2	Amestecul să conțină cel puțin:
Carbohidrat	1	3	8
Vitamine	3	4	19
Proteine	3	1	7
Costul	50	25	

Se cere un amestec din aceste uleiuri care să satisfacă cerințele menționate în ultima coloană a tabelului (27) și să corespundă costului minim.

Problema primală

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\geqslant 8 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geqslant 19 \\ 3x_1 + x_2 &\geqslant 7 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\min z = 50x_1 + 25x_2$$

Problema duală

$$\begin{aligned} u_1 + 3u_2 + 3u_3 &\leqslant 50 \\ 3u_1 + 4u_2 + u_3 &\leqslant 25 \\ u_1, u_2, u_3 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\max v = 8u_1 + 19u_2 + 7u_3$$

Din acest exemplu se observă că:

— numărul variabilelor dualei este egal cu numărul restricțiilor problemei primale;

— numărul restricțiilor dualei este egal cu numărul variabilelor problemei primale;

— matricea dualei este transpusa matricei primalei;

— dacă primala este o problemă de minim, duala este o problemă de maxim.

Scanned with OKEN Scanner

C. E. Lemke[49] a descoperit unele relaţii între bazele sistemului primal şi dual. Aceste relaţii dau posibilitatea de a privi algoritmul simplex aplicat dualei ca o succesiune de schimbări de bază în primală. Soluţiile problemei primale, asociate acestor baze, nu sînt realizabile dar multiplicatorii simplex continuă să constituie criteriile de optimalitate ale soluţiei. Redăm diagrama Tucker a cuplului de sisteme primal-duale, din care se observă că dacă se iau $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ca variabile din bază ale problemei primale, multiplicatorii $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ şi $\bar{c}_{m+1}, \bar{c}_{m+2}, \ldots, \bar{c}_n$ constituie o soluţie de bază a dualei.

Diagrama dată de A. W. Tucker pentru sisteme primal-duale

(28)

		Primal			
	Variabile	$x_1\ x_2\ \ldots\ x_m$	$x_{m+1}\ \ldots\ x_n$	Restricţii	Constante
Dual	$\bar{c}_1 \geq 0$	1		$\geqslant$	0
	$\bar{c}_2 \geq 0$	$\ddots$		$\geqslant$	0
	$\vdots$				
	$\bar{c}_m \geq 0$	1		$\geqslant$	0
	$\bar{c}_{m+1} \geq 0$		1	$\geqslant$	0
	$\vdots$		$\ddots$		
	$\bar{c}_n \geq 0$		1	$\geqslant$	0
	π_1	$a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1m}$	$a_{1,m+1}\ \ldots\ a_{1,n}$	$=$	d_1
	π_2	$a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2m}$	$a_{2,m+1}\ \ldots\ a_{2,n}$	$=$	d_2
	$\vdots$				$\vdots$
	π_m	$a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots\ a_{mm}$	$a_{m,m+1}\ \ldots\ a_{m,n}$	$=$	d_m
	Restricţii	$\leqslant\ \leqslant\ \leqslant$	$\leqslant\ \leqslant$		Max v
	Constante	$c_1\ c_2\ \ldots\ c_m$	$c_{m+1}\ \ldots\ c_n$	min z	

Scanned with OKEN Scanner

Mărimile $\bar{c}_j$ pe care G. B. Dantzig le numește prețuri comparative sau prețuirea activității x_j în funcție de activitățile $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sînt diferențele $c_j - z_j$ (vezi punctul 4, § 3).

Matricea $B = (a_{ij})$; $i,j = 1, 2, \ldots, m$, este baza sistemului primal, în timp ce matricea încadrată în diagramă cu linii duble întrerupte este transpusa bazei duale $\bar{B}$. Este ușor de văzut că dacă B admite inversă și $\bar{B}$ admite inversă. În adevăr, observăm în primul rînd că $\bar{B}$ este o matrice pătrată cu dimensiunile $n \times n$; în al doilea rînd să arătăm că determinantul matricei $\bar{B}$, notat cu $|\bar{B}|$, are aceeași valoare absolută cu determinantul matricei $\bar{B}$. Pentru aceasta descompunem matricea $\bar{B}$ în patru submatrice care, în ordinea în care apar în diagramă sînt:

— matricea nulă cu dimensiunile $(n - m) \times m$, pe care o notăm cu 0;

— matricea unitate cu dimensiunile $(n - m) \times (n - m)$, notată $E^{(n-m)}$;

— matricea B cu dimensiunile $m \times m$;

— matricea formată din elementele $a_{i,j}$; $i = 1, \ldots, m$, $j = m + 1, \ldots, n$, cu dimensiunile $m \times (n - m)$, care se va nota cu $R_{m,n-m}$.

Cu aceste notații avem

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ E^{(n-m)} & R_{m,n-m} \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \bar{B} = -|B|E^{(n-m)} = -|B|,$$

ceea ce dovedește afirmația făcută. Din diagrama A. W. Tucker se stabilesc cu ușurință următoarele corespondențe între problema primală și duala ei:

(29)

	Primal	Dual
Baze	B	$\bar{B}$
Variabile din bază	$x_1 \ldots x_m$	$\bar{c}_{m+1} \ldots \bar{c}_n$; $\pi_1 \ldots \pi_m$
Variabile care nu aparțin bazei	$x_{m+1} \ldots x_n$	$\bar{c}_1 \ldots \bar{c}_m$
Condiții pentru ca soluția să fie realizabilă	$x_i = d_i \geq 0 \quad i \in M$	$\bar{c}_j \geq 0 \quad j \in N$

Scanned with OKEN Scanner

2. Teoremele fundamentale ale dualității

Fiind dat un cuplu de probleme duale scrise în forma canonică matricială

$$I_c\begin{cases} Ax \geqslant d \\ x \geqslant 0 \\ \min z = cx \end{cases} \qquad II_c\begin{cases} uA \leqslant c \\ u \geqslant 0 \\ \max v = ud \end{cases}$$

se pot demonstra următoarele relații între perechile de soluții realizabile:

Lema I. Dacă $\bar{x}$ și $\bar{u}$ constituie un cuplu de soluții duale de bază realizabile, atunci

$$c\,\bar{x} \geqslant \bar{u}\,d.$$

Demonstrație. Dacă $\bar{x}$ este o soluție de bază realizabilă pentru I_c, avem

$$A\,\bar{x} \geqslant d; \tag{I.4.11}$$

$\bar{u}$ fiind un vector nenegativ, se poate înmulți inegalitatea (I.4.11) la stînga cu $\bar{u}$ și avem

$$\bar{u}\,A\,\bar{x} \geqslant \bar{u}d. \tag{I.4.12}$$

Pe de altă parte, $\bar{u}$ este o soluție de bază realizabilă pentru II_c, deci

$$\bar{u}\,A \leqslant c. \tag{I.4.13}$$

Înmulțind inegalitatea (I.4.13) la dreapta cu vectorul nenegativ $\bar{x}$ avem

$$\bar{u}\,A\,\bar{x} \leqslant c\bar{x}. \tag{I.4.14}$$

Din (I.4.12) și (I.4.14) rezultă că

$$c\bar{x} \geqslant \bar{u}d.$$

Corolar. Orice cuplu de soluții duale de bază realizabile $\bar{x}$ și $\bar{u}$ care satisfac condiția

$$c\bar{x} = \bar{u}d$$

este un cuplu de soluții optime.

Demonstrație. Dacă $\bar{x}$ nu este soluția optimă pentru I_c, există o soluție $\bar{\bar{x}}$ pentru care

$$c\bar{\bar{x}} < c\,\bar{x} \leqslant \bar{u}\,d, \tag{I.4.15}$$

ceea ce contrazice lema precedentă.

Teorema fundamentală a dualității se poate enunța scindată într-o teoremă de existență și teorema propriu-zisă a dualității. Aceste teoreme vor fi numai enunțate, fără a se demonstra.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema de existență. Pentru un cuplu de probleme duale se poate prezenta una din următoarele situații și numai una singură.

a) nici una din probleme nu are o soluție;

b) una din probleme nu admite nici o soluție și cealaltă are cel puțin o soluție, dar nu admite o soluție optimă finită;

c) ambele probleme au soluții optime.

Teorema dualității. O condiție necesară și suficientă pentru ca soluția realizabilă de bază $\bar{x}$ a problemei primale să fie optimă este să existe o soluție realizabilă de bază a dualei, $\bar{u}$, astfel ca funcțiile obiectiv ale problemei duale să ia aceeași valoare, adică

$$c\bar{x} = \bar{u}\, d\,. \tag{I.4.16}$$

Pe baza teoremei dualității se demonstrează unele relații între perechile de restricții duale, cunoscute sub numele de *teoremele abaterilor complementare.*

Teorema I. O condiție necesară și suficientă pentru ca soluțiile realizabile de bază $\bar{x}$ și $\bar{u}$ ale unui cuplu de probleme duale să fie optime este ca aceste soluții să verifice relațiile

$$u\,(Ax - d) = 0 \tag{I.4.17}$$

și

$$(c - uA)\, x = 0. \tag{I. 4.18}$$

Vom reda demonstrația dată acestei teoreme de Simonnard[69].

Demonstrație. Dacă $\bar{x}$ și $\bar{u}$ sînt soluții realizabile de bază, atunci avem

$$\alpha = \bar{u}\,(A\,\bar{x} - d) \geqslant 0 \tag{I.4.19}$$

și

$$\beta = (c - \bar{u}\,A)\,\bar{x} \geqslant 0. \tag{I.4.20}$$

În conformitate cu teorema dualității, $\bar{x}$ și $\bar{u}$ satisfac condiția

$$c\,\bar{x} = \bar{u}\,d,$$

deci

$$\alpha + \beta = c\,\bar{x} - \bar{u}\,d = 0. \tag{I.4.21}$$

Suma a două mărimi pozitive nu poate fi nulă decît dacă fiecare mărime este nulă, așadar din relația (1.4.21) rezultă

$$\alpha = \beta = 0,$$

ceea ce demonstrează teorema enunțată.

Scanned with OKEN Scanner

Condiția (I.4.17) scrisă sub forma

$$\sum_{i \in M} \bar{u}_i(\alpha_i \bar{x} - d_i) = 0, \tag{I.4.22}$$

unde s-a notat cu α_i linia i a matricei A, este verificată dacă și numai dacă

$$\bar{u}_i(\alpha_i \bar{x} - d_i) = 0 \quad \text{pentru toți } i \in M, \tag{I.4.23}$$

deoarece toți termenii sumei sînt pozitivi. Condițiile (I.4.23) arată că

$$\begin{gathered} \bar{u}_i > 0 \text{ implică } \alpha_i \bar{x} = d_i \\ \alpha_i \bar{x} > d_i \text{ implică } \bar{u}_i = 0 \end{gathered} \tag{I.4.24}$$

adică :

— variabilele u_i strict pozitive în soluția optimă de bază a dualei corespund restricțiilor problemei primale satisfăcute cu semnul $=$;

— dacă o restricție a primalei este satisfăcută de soluția optimă de bază cu semnul $>$, variabila asociată ei ia valoarea zero în soluția optimă de bază a dualei.

Relația (I.4.23) poate fi satisfăcută și dacă

$$\bar{u}_i = 0 \quad \text{și} \quad \alpha_i \bar{x} - d_i = 0.$$

Teorema următoare, pentru care nu se va da demonstrația[69], arată că aceste condiții nu sînt satisfăcute simultan de *toate* perechile de soluții duale optime.

Teorema II. Dacă ambele probleme ale unui cuplu de probleme duale admit soluții realizabile de bază, există cel puțin o pereche de soluții optime de bază $\bar{x}$ și $\bar{u}$ care satisfac relațiile

$$(A\bar{x} - d) + \bar{u} > 0 \tag{I.4.25}$$

și

$$(c - \bar{u}A) + \bar{x} > 0. \tag{I.4.26}$$

Aceste relații sînt echivalente cu inegalitățile

$$\sum_{i \in M} (\alpha_i \bar{x} - d_i) + \bar{u}_i > 0, \tag{I.4.27}$$

$$\sum_{i \in M} (c_i - \bar{u}_i \alpha_i) + \bar{x}_i > 0, \tag{I.4.28}$$

în care toți termenii sînt pozitivi, deci nu pot fi satisfăcute decît dacă

$$(\alpha_i \bar{x} - d_i) = 0 \quad \text{implică } u_i > 0$$

și

$$u_i = 0 \quad \text{implică } \alpha_i \bar{x} - d_i > 0.$$

3. Relații între soluțiile optime ale problemelor duale

Să considerăm problema de programare liniară

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geqslant d_i ; \qquad i \in M, \tag{I.4.29}$$

$$x_j \geqslant 0 ; \qquad j \in N ;$$

$$\min z = \sum_{j \in N} c_j x_j. \tag{I.4.30}$$

Să arătăm că transformarea inecuațiilor (I.4.29) în ecuații prin scăderea unor variabile nenegative, pe care le notăm cu x_i^e, nu modifică modelul dualei. În adevăr, sistemul (I.4.29) se scrie

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j - x_i^e = d_i ; \qquad i \in M. \tag{I.4.31}$$

Variabilele duale u_i corespunzătoare ecuațiilor (I.4.31) sînt oarecare, dar trebuie să satisfacă sistemul de condiții

$$\sum_{i \in M} a_{ij} u_i \leqslant c_j ; \qquad j \in N, \tag{I.4.32}$$

$$- u_i \leqslant 0 ; \qquad i \in M. \tag{I.4.33}$$

Condiția (I.4.33) este echivalentă cu

$$u_i \geqslant 0, \tag{I.4.34}$$

care este duala condiției de nenegativitate a variabilei x_i^e, deci sistemul de restricții ale dualei problemei modificate se compune din relațiile (I.4.32) și (I.3.34) identice cu ale modelului II_c realizat prin dualizarea problemei inițiale.

Fie $\bar{x}_B$ o soluție optimă a problemei (I.4.29) — (I.4.30) corespunzătoare bazei B și I mulțimea indicilor vectorilor care aparține bazei B. Această mulțime este formată din reuniunea a două mulțimi: I_1 mulțimea indicilor vectorilor asociați variabilelor de structură a problemei și I_2 a celor asociați variabilelor x_i^e.

Dacă B este bază optimă sînt îndeplinite criteriile de optimalitate

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j \leqslant 0 \tag{I.4.35}$$

pentru toți vectorii care nu aparțin bazei și

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j = 0 \tag{I.4.36}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru toţi vectorii din bază. Ţinînd seamă de (I.4.8), adică

$$c_B\ B^{-1} = \bar{u}_B,$$

condiţia (I.4.36) este

$$\bar{u}_B\ a_j = c_j \qquad \text{pentru } j \in I_1 \tag{I.4.37}$$

şi

$$\bar{u}_B\ a_j = 0 \qquad \text{pentru } j \in I_2, \tag{I.4.38}$$

deoarece coeficienţii variabilelor x_i^e în funcţia obiectiv sînt nuli. Relaţiile (I.4.37) arată că dacă o variabilă x_j aparţine bazei optimale a problemei primale, restricţia $ua_j \leqslant c_j$ din dual este satisfăcută cu semnul $=$ de soluţia optimă dual asociată. Relaţiile (I.4.38) au următoarea semnificaţie: cînd variabila x_i^e aparţine bazei optime a primalei, variabila u_i corespunzătoare restricţiei i este nulă în soluţia optimă dual asociată. Aceste rezultate concordă cu afirmaţiile teoremelor I şi II ale abaterilor complementare.

Condiţiile (I.4.35), scrise sub forma

$$\bar{u}_s\ a_j \leqslant c_j \qquad \text{pentru } j \in N - I,$$

arată că soluţia $\bar{u}_B = c_B B^{-1}$ verifică toate restricţiile duale.

De asemenea se verifică uşor că $\bar{u}_B$ este soluţia optimă dual asociată soluţiei optime $\bar{x}_B$ a primalei. În adevăr, valorile funcţiilor obiectiv pentru aceste soluţii sînt

$$\bar{z} = c_B \bar{x}_B = c_B B^{-1}\ d \quad \text{şi} \quad \bar{v} = \bar{u}_B\ d = c_B B^{-1}\ d, \text{ deci } \bar{z} = \bar{v},$$

condiţie necesară şi suficientă pentru ca $(\bar{x}_B, \bar{u}_B)$ să fie un cuplu de soluţii optime duale.

Relaţiile (I.4.37) — (I.4.38) mai arată că în linia $z_j - c_j$ din iteraţia care dă soluţia optimă a primalei apare soluţia dual optimă asociată.

Pentru verificarea concluziilor din acest paragraf vom rezolva prin metoda simplex problema primală şi dual din exemplul I, § 4.

Sistemul restricţiilor primalei, transformat în sistem de ecuaţii, este

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 &= 19, \\ 3x_1 + x_2 - x_5 &= 7. \end{aligned} \tag{I.4.39}$$

Dacă se scad ecuaţiile întîi şi a treia din ecuaţia a doua, sistemul devine

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 &= 19, \\ 3x_2 - x_4 + x_5 &= 12. \end{aligned} \tag{I.4.40}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a găsi o soluţie de bază realizabilă a acestui sistem este suficient să se adauge o variabilă artificială x_6 în ecuaţia a doua. Această variabilă va apărea în funcţia obiectiv cu coeficientul M, în cazul în care se foloseşte metoda penalităţii.

Redăm tabelul simplex (30) al acestei probleme.

Tabelul simplex al problemei primale

(30)

c_B ↓	$c_j \longrightarrow$		0	M	0	50	25	0
	Baza	d	a_3	a_6	a_5	a_1	a_2	a_4
0	a_3	11	1			2	1	− 1
M	a_6	19		1		3	4	− 1
0	←a_5	12			1	0	3*	− 1
	$z_j - c_j$	$19M$	0	0	0	$3M$ −50	$4M$ −25	$-M$
0	a_3	7	1		− 1/3	2		− 2/3
M	←a_6	3		1	− 1/3	3*		1/3
25	a_2	4			1/3	0	1	− 1/3
	$z_j - c_j$	$3M$ + 100	0	0	− 4/3M + 25/3	$3M$ −50	0	1/3M − 25/3
0	a_3	5	1	−2/3	5/9			− 8/9
25	a_1	1		1/3	− 4/9	1		1/9
50	a_2	4		0	1/3		1	− 1/3
	$z_j - c_j$	150	0	$-M$ +50/3	− 125/9	0	0	− 25/9

Soluţia optimă este $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ şi valoarea funcţiei obiectiv este $z = 150$, adică amestecul cel mai economic se face luînd o parte din uleiul U_1 şi patru părţi din uleiul U_2; costul unitar al amestecului este

Scanned with OKEN Scanner

de 150 unităţi monetare. Amestecul astfel obţinut conţine 13 u. de carbohidrat, deci cu 5 u. mai mult decît minimul cerut, rezultat care apare şi în soluţia optimă, fiindcă variabila de abatere x_3 din prima ecuaţie ia valoarea 5 în soluţia optimă. Condiţiile relative la conţinutul de vitamine şi proteine sînt satisfăcute cu semnul egal, fapt care se reflectă în soluţia optimă prin aceea că variabilele de abatere din ecuaţiile a doua şi a treia, x_6 şi x_5, sînt nule în ultima iteraţie.

Soluţia problemei duale se citeşte din tabelul optim al primalei astfel : $u_1 = 0$ deoarece variabila de abatere asociată primei ecuaţii apare în soluţia optimă cu valoare nenulă ; $u_2 = 25/9$; $u_3 = 125/9$ fiindcă ultimele două restricţii sînt satisfăcute cu semnul egal, iar a_4 şi a_5 sînt vectorii asociaţi variabilelor de abatere x_4 şi x_5 din (I.4.39).

Pentru verificarea acestor rezultate se rezolvă şi problema duală prin algoritmul simplex. O soluţie pentru iniţierea algoritmului se găseşte adăugînd variabilele de abatere u_4 şi u_5 celor două restricţii ale modelului.

Coeficienţii variabilelor de abatere în funcţia obiectiv sînt nuli.

Tabelul simplex al problemei duale

(31)

d_B	d_i Baza	c	0 b_4	0 b_5	8 b_1	19 b_2	7 b_3
0	b_4	50	1		1	3	3
0	$\leftarrow b_5$	25		1	3	4*	1
	$v_i - d_i$	0	0	0	− 8	− 19	− 7
0	$\leftarrow b_4$	125/4	1	− 3/4	− 5/4		9/4*
19	b_2	25/4		1/4	3/4	1	1/4
	$v_i - d_i$	475/4	0	19/4	25/4	0	− 9/4
7	b_3	125/9	4/9	− 1/3	− 5/9		1
19	b_2	25/9	− 1/9	1/3	8/9	1	
	$v_i - d_i$	150	1	4	5	0	0

În iteraţia optimă a problemei apare, pe ultima linie, soluţia primalei şi se citeşte astfel : ambele restricţii ale dualei sînt satisfăcute cu semnul =, deci variabilele x_1 şi x_2 în soluţia optimă a primalei sînt

Scanned with OKEN Scanner

nenule și egale cu valorile înscrise în linia $v_i - d_i$ corespunzătoare vectorilor b_4 și b_5 asociați variabilelor de abatere din aceste restricții. Citim $x_1 = 1$; $x_2 = 4$. Variabila $u_1 = 0$ înseamnă că prima restricție a primalei este satisfăcută cu semnul $>$ și deci variabila de abatere asociată acestei restricții este nenulă, adică $x_3 = 5$; analog se deduce că $x_4 = x_5 = 0$.

§ 5. ALGORITMUL DUAL SIMPLEX

1. Soluții de bază dual-realizabile

Fie dată o problemă de programare liniară sub forma

$$Ax = d, \tag{I.5.1}$$

$$x \geqslant 0 ;$$

$$\min z = cx, \tag{I.5.2}$$

în care A este o matrice $m \times n$ dimensională și $r(A) = m$. Reamintim că orice vector $\bar{x}$ cu m componente nenegative, care verifică ecuația matricială (I.5.1), se numește o soluție realizabilă de bază a problemei de programare liniară ; $\bar{x}_B$ este o soluție optimă dacă sînt îndeplinite condițiile :

$$\begin{gathered} z_j - c_j \leqslant 0 \text{ pentru toți } j \in J, \\ z_j - c_j = 0 \text{ pentru toți } j \in I. \end{gathered} \tag{I.5.3}$$

Criteriile de optimalitate (I.5.3) a soluției $\bar{x}_B$ asociată bazei B sînt echivalente cu condițiile :

$$\begin{gathered} c_B B^{-1} a_j \leqslant c_j \text{ pentru toți } j \in J, \\ c_B B^{-1} a_j = c_j \text{ pentru toți } j \in I, \end{gathered} \tag{I.5.4}$$

deoarece

$$B^{-1} a_j = g_j \text{ și } c_B g_j = z_j$$

Duala problemei (I.5.1) — (I. 5.2) este

$$u A \leqslant c, \tag{I.5.5}$$

u oarecare ;

$$\max\ v = ud. \tag{I.5.6}$$

În paragraful precedent s-a arătat că oricărei soluţii realizabile de bază $\bar{x}$ a problemei primale îi corespunde o soluţie $\bar{u}$ a problemei duale şi că orice cuplu de soluţii realizabile de bază $(\bar{x}, \bar{u})$ a celor două probleme satisface inegalitatea

$$c\bar{x} \geqslant \bar{u}\, d$$

(lema I din § 4, punctul 2). Din relaţia (I.4.8) avem

$$c_B \cdot B^{-1} = \bar{u}_B,$$

deci criteriile de optimalitate (I.5.4) a bazei B se mai pot scrie :

$$\bar{u}_B\, a_j \leqslant c_j \quad \text{pentru toţi } j \in J,$$

$$\bar{u}_B a_j = c_j \quad \text{pentru toţi } j \in I. \tag{I.5.7}$$

Condiţiile (I.5.7) arată că vectorul $\bar{u}_B$ verifică ecuaţia matricială (I.5.5), deci este o soluţie a problemei duale. Să arătăm că $\bar{u}_B$ este o soluţie optimă a dualei, deci că

$$\bar{u}_B\, d_B = \max.$$

Să admitem contrariul, adică existenţa unei soluţii $\bar{\bar{u}}$ asociată unei baze B' pentru care

$$\bar{\bar{u}} d_{B'} > \bar{u}_B\, d_B. \tag{I.5.8}$$

Deoarece $\bar{x}_B$ este o soluţie optimă a primalei, valoarea funcţiei obiectiv pentru această soluţie este minimă, deci

$$\bar{u}_B\, \bar{x}_B < c_{B'}.\ \bar{\bar{x}}. \tag{I.5.9}$$

În baza lemei I din § 4, punctul 2, avem

$$\bar{u}_B\, d_B \leqslant c_{B'}\, \bar{x}_B. \tag{I.5.10}$$

Din (I.5.9) şi (I.5.10) se deduce

$$\bar{u}_B\, d_B < c_{B'}\, \bar{\bar{x}} = c_{B'}(B')^{-1} d_{B'} = \bar{\bar{u}}\, d_{B'}, \tag{I.5.11}$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultat care contrazice ipoteza formulată în (I.5.8), adică existența unei soluții pentru care funcția obiectiv a dualei poate lua o valoare mai mare decît $\bar{u}_B\, d_B$.

În concluzie, dacă B este o bază optimă pentru problema primală, $\bar{u}_B$ este o soluție optimă pentru cea duală.

Dacă B este o bază a problemei primale pentru care sînt îndeplinite criteriile de optim, dar vectorul $\bar{x}_B$ asociat acestei baze nu are toate componentele nenegative, $\bar{x}_B$ este totuși o *soluție dual-realizabilă de bază*. Vectorul $\bar{u}_B$ asociat unei soluții dual-realizabile de bază $\bar{x}_B$ constituie o soluție de bază a problemei duale, așa cum rezultă din condițiile (I.5.7).

Algoritmul dual simplex se sprijină pe această observație. Acest algoritm, stabilit de C. Lemke[49], folosește ca soluție inițială o soluție dual-realizabilă și, printr-o metodă iterativă, face să descrească numărul componentelor negative din soluția inițială, avînd grijă ca în toate iterațiile condițiile de optimalitate să rămînă satisfăcute. După un număr finit de iterații se ajunge la o soluție care nu mai are nici o componentă negativă, deci la soluția optimă, sau se dovedește că problema nu admite un optim finit.

Algoritmul dual se aplică problemei primale.

2. Algoritmul dual simplex

Să admitem că pentru o problemă de programare cu modelul (I.5.1) — (I.5.2) se cunoaște o soluție dual-realizabilă $\bar{x}_B$ asociată bazei B. Din definiția soluției dual-realizabile rezultă că:

sînt îndeplinite condițiile de optimalitate $z_j - c_j \leqslant 0$ pentru toți vectorii, $j \in J$, care nu aparțin bazei B.

Notăm cu I_1 mulțimea indicilor corespunzători componentelor negative ale vectorului $\bar{x}_B$, presupusă nevidă.

Cercetînd elementele g_{sj}, $s \in I_1$, $j \in J$, se pot prezenta următoarele situații:

1°. Toate elementele g_{sj}; $j \in J$ situate pe linia unei componente negative $\bar{x}_s$ a vectorului $\bar{x}_B$ sînt pozitive sau nule. În acest caz, problema propusă nu are soluție realizabilă de bază. În adevăr, să admitem că pentru $\bar{x}_s < 0$ toți $g_{sj} \geqslant 0$; $j \in J$.

Fie $\bar{u}_B$ soluția problemei duale (I.5.5) — (I.5.6) asociată soluției $\bar{x}_B$ a primalei. Dacă $\bar{x}_B$ nu este o soluție realizabilă, $\bar{u}_B$ nu este soluția optimă a dualei. Pentru a justifica această afirmație vom arăta că $\bar{u}_B$ poate fi îmbunătățită. Fie $\bar{u}'$ o altă soluție a problemei duale, definită astfel:

$$\bar{u}' = \bar{u}_B - \theta\, \beta_s, \qquad \text{(I.5.12)}$$

unde β_s este linia de indice s din B^{-1}. Înmulțind la dreapta această egalitate cu vectorul d avem

$$\bar{u}' d = \bar{u}_B d - \theta x_s. \tag{I.5.13}$$

Din (I.5.13) rezultă că pentru orice $\theta > 0$, $\bar{u}' d > \bar{u}_B d$ dacă $x_s < 0$, deci că funcția obiectiv v ia o valoare mai mare pentru soluția $\bar{u}'$. Înmulțind la dreapta egalitatea (I.5.12) cu vectorul a_j; $j \in N$, avem

$$\bar{u}' a_j = \bar{u}_B a_j - \theta \beta_s a_j = \bar{u}_B a_j - \theta g_{sj} = z_j - \theta g_{sj} \tag{I.5.14}$$

Vectorul $\bar{u}'$ verifică sistemul (I.5.5), deci este o soluție a problemei duale atîta timp cît:

$$\bar{u}' a_j \leqslant c_j \text{ pentru toți } j \in J$$

și

$$\bar{u}' a_j = c_j \text{ pentru toți } j \in I.$$

Din (I.5.14) rezultă că aceste condiții sînt îndeplinite pentru orice $\theta > 0$ dacă $g_{sj} \geqslant 0$, pentru orice $j \in J$. Cînd $\theta \to \infty$, $\bar{u}' \to \infty$, deci problema duală nu are un maxim finit, ceea ce înseamnă că problema primală nu are o soluție realizabilă de bază.

2°. Să admitem că pentru orice componentă negativă $\bar{x}_s$ a vectorului $\bar{x}_B$ există cel puțin un $g_{sj} < 0$; $j \in J$. Din relația (I.5.14) rezultă că $\bar{u}'$ rămîne o soluție a dualei, dacă

$$z_j - \theta g_{sj} \leqslant c_j; \quad j \in J,$$

adică

$$\theta \leqslant \min_{j \in J} \left[\frac{z_j - c_j}{g_{sj}}, \; g_{sj} < 0 \right]. \tag{I.5.15}$$

Dacă

$$\theta = \frac{z_k - c_k}{g_{sk}} = \min_{j \in J} \left[\frac{z_j - c_j}{g_{sj}}, \; g_{sj} < 0 \right],$$

avem

$$\bar{u}' a_k = c_k.$$

Scanned with OKEN Scanner

Matricea B' obținută înlocuind în B vectorul a_s prin a_k este nedegenerată, deoarece $g_{sk} \neq 0$, deci constituie o bază căreia îi corespunde soluția $\bar{x}' = (B')^{-1} d$ a problemei primale.

Dacă $\bar{x}'$ are toate componentele nenegative, aceasta este soluția optimă a problemei date. Dacă $\bar{x}'$ are și componente negative se poate repeta raționamentul făcut, pînă cînd se ajunge fie la soluția optimă, fie la concluzia că problema nu are o soluție realizabilă de bază.

Algoritmul dual simplex pleacă de la ipoteza că se cunoaște o soluție dual-realizabilă de bază a problemei de programare liniară, deci o soluție care are și componente $x_s < 0$, dar pentru care sînt satisfăcute condițiile

$$z_j - c_j \leqslant 0 \text{ pentru } j \in J.$$

Algoritmul constă în aplicarea următoarelor reguli:

a. Se cercetează componentele negative x_s ale soluției. Fie I_1 mulțimea indicilor acestor componente. În cazul în care pentru un $s \in I_1$ toate elementele g_{sj} ale liniei s corespunzătoare vectorilor care nu aparțin bazei sînt nenegative, problema nu admite o soluție realizabilă de bază. În caz contrar, se alege vectorul care iese din bază, astfel:

b. Se determină

$$\bar{x}_l = \min_{s \in I_1} [\bar{x}_s]. \tag{I.5.16}$$

Vectorul a_l se exclude din bază, deci (I.5.16) constituie *criteriul de ieșire din bază*.

c. Se determină vectorul a_k prin condiția

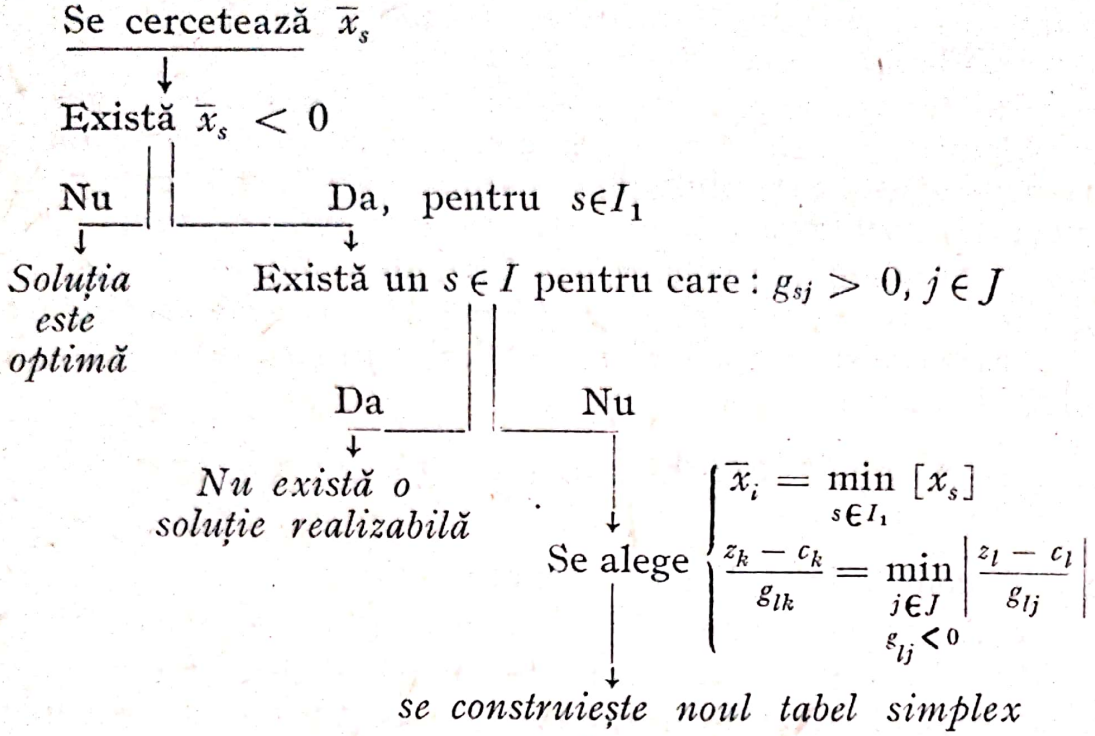
$$\frac{z_k - c_k}{g_{lk}} = \min_{\substack{j \in J \\ g_{lk} < 0}} \left| \frac{z_l - c_l}{g_{lk}} \right|, \tag{1.5.17}$$

Vectorul a_k înlocuiește în B vectorul a_l, deci (I.5.17) constituie *criteriul de intrare în bază*.

d. Se construiește noul tabel simplex. Dacă soluția corespunzătoare bazei noi nu mai conține nici o componentă negativă, aceasta înseamnă că s-a determinat soluția optimă. În caz contrar se reia aplicarea algoritmului de la punctul *a*. După un număr finit de iterații se determină soluția optimă sau se ajunge la concluzia că nu există o soluție realizabilă de bază.

Scanned with OKEN Scanner

Prezentarea schematică a algoritmului simplex dual:



Din cele expuse se constată că algoritmul simplex dual se aplică problemei primale. Pentru schimbarea bazei se determină întîi vectorul care iese din bază și apoi vectorul care îl înlocuiește. Funcția obiectiv v a dualei crește la fiecare iterație (dacă $\theta \neq 0$), deci și valoarea funcției obiectiv z a primalei se apropie de minimum prin valori crescătoare. De aici rezultă că primala admite un minim finit, lucru de altfel deja stabilit prin ipoteza existenței unei soluții dual-realizabile care garantează existența acestui minim.

3. Determinarea unei soluții de bază dual-realizabile

De obicei, algoritmul dual simplex se aplică în unele probleme de postoptimizare și în problemele parametrice cînd se cunoaște o soluție pentru care sînt verificate condițiile de optim: $z_j - c_j \leqslant 0$ pentru z minim sau $z_j - c_j \geqslant 0$ pentru z maxim.

Dacă se aplică algoritmul unei probleme în care nu este cunoscută o soluție dual-realizabilă, se impune determinarea ei. Se vor studia mai multe ipoteze.

Cazul I. *Toți coeficienții funcției obiectiv sînt nenegativi*

Să admitem că într-o problemă de minim, vectorii c și d sînt nenegativi, iar sistemul de restricții se transformă în sistem de ecuații prin adăugarea variabilelor de abatere cu semnul + sau —. În cazul în care

Scanned with OKEN Scanner

acestor variabile li se dau coeficienţi nuli în funcţia obiectiv, condiţiile de optimalitate, pentru baza formată din vectorii ataşaţi variabilelor de abatere, sînt îndeplinite, deoarece

$$z_j - c_j = -c_j \leqslant 0.$$

Exemplul I. Să se determine

$$\min z = 3x_1 + x_2 + 1/2\, x_3 + x_4$$

pentru valorile variabilelor care satisfac condiţiile

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 &\leqslant 6, \\ 3x_2 - 2x_3 - x_5 &\geqslant 4, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &\leqslant 5, \\ x_i \geqslant 0; \quad i = 1, \ldots, 8. & \end{aligned}$$

Sistemul restricţiilor se transformă în sistem de ecuaţii dacă se adaugă în prima şi în ultima relaţie variabilele x_6 şi x_8 cu semnul $+$ şi în a doua x_7 cu semnul $-$. Coeficienţii acestor variabile în funcţia obiectiv se iau egali cu zero. Pentru a obţine o matrice unitară de ordinul al treilea se înmulţeşte ecuaţia a doua cu -1. Avem:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 + x_6 &= 6, \\ -3x_2 - 2x_3 + x_5 + x_7 &= -4, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_8 &= 5, \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, 8; & \\ \min z = 3x_1 + x_2 + 1/2\, x_3 + x_4. & \end{aligned}$$

Soluţia corespunzătoare bazei formate de vectorii unitari este dual realizabilă, deoarece are componenta $x_7 = -4$ şi condiţiile de optimalitate îndeplinite — diferenţele $z_j - c_j$ corespunzătoare vectorilor care nu aparţin bazei sînt negative în tabelul simplex iniţial.

Pentru îmbunătăţirea soluţiei, vectorul a_7 iese din bază; vectorul care îl înlocuieşte se determină calculînd rapoartele dintre elementele negative din linia a_7 (iteraţia 0) şi cele corespunzătoare din linia $z_j - c_j$ şi alegînd raportul minim. Avem $\min \{1/3;\ 1/4\} = 1/4$, care corespunde vectorului a_3. Soluţia asociată bazei formate de vectorii a_6, a_3 şi a_8 este tot dual realizabilă, deoarece mai conţine o componentă negativă. Aplicînd din nou algoritmul dual simplex se obţine soluţia optimă. Vectorului a_2 îi corespunde diferenţa $z_2 - c_2 = 0$, deci soluţia optimă nu este unică. În ultima iteraţie din tabelul precedent se determină

Tabelul iteraţiilor — algoritmul dual simplex

(31)

c_B ↓	Baza	d	c_j ⟶	0	0	0	3	1	1/2	1	0
				a_6	a_7	a_8	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_6	6		1	0	0	1	5	− 2	1	0
0	←a_7	−4		0	1	0	0	− 3	− 2*	0	1
0	a_8	5		0	0	1	4	− 1	1	2	3
$z_j - c_j$		0		0	0	0	− 3	− 1	−1/2	−1	0
0	a_6	10		1	− 1	0	1	8	0	1	− 1
1/2	a_3	2		0	− 1/2	0	0	3/2	1	0	− 1/2
0	←a_8	−3		0	1/2	1	4	− 5/2	0	2	− 5/2*
$z_j - c_j$		1		0	− 1/4	0	− 3	− 1/4	0	− 1	− 1/4
0	a_6	56/5		1	− 6/5	− 2/5	− 3/5	9	0	1/5	0
1/2	a_3	22/5		0	− 3/5	− 1/5	− 4/5	2	1	− 2/5	0
0	←a_5	6/5		0	− 1/5	− 2/5	− 8/5	1*	0	− 1/5	1
$z_j - c_j$		11/5		0	− 3/10	− 1/10	− 17/5	0	0	− 6/5	0
0	a_6	2/5		1	3/5	16/5	69/5	0	0	2	− 9
1/2	a_3	2		0	−1/5	3/5	12/5	0	1	0	− 2
1	a_2	6/5		0	−1/5	−3/5	− 8/5	1	0	− 1/5	1
$z_j - c_j$		11/5		0	−3/10	−1/10	− 17/5	0	0	− 6/5	0

a doua soluţie optimă. Valorile funcţiei obiectiv corespunzătoare soluţiilor succesive ale exemplului studiat sînt 0; 1 şi 11/5, ceea ce verifică observaţia că aplicînd algoritmul simplex dual funcţia obiectiv se apropie de minim prin valori crescătoare.

Cazul II. *Coeficienţii funcţiei obiectiv nu sînt toţi nenegativi*

În cazul general, determinarea unei soluţii dual-realizabile necesită introducerea unei restricţii suplimentare. Să admitem că matricea sistemului de restricţii al problemei conţine m vectori liniar indepen-

Scanned with OKEN Scanner

denți, deci că dispunem de o bază B căreia îi corespunde o soluție $\bar{x}_B$ conținînd și componente negative, iar diferențele $z_j - c_j$ nu sînt toate negative (pentru o problemă de minim). Dacă această ultimă condiție nu ar fi satisfăcută am dispune de o soluție dual-realizabilă.

Sistemul de restricții explicitat în raport cu variabilele bazice se scrie:

$$x_s + \sum_{j \in J} g_{sj}\, x_j = \bar{x}_s\,; \qquad s \in I. \tag{I.5.18}$$

Înlocuind în funcția obiectiv variabilele x_s prin valorile date de (I.5.18), avem

$$z = \sum_{s \in I} c_s\, x_s + \sum_{j \in J} c_j\, x_j = \sum_{s \in I} c_s \left(\bar{x}_s - \sum_{j \in J} g_{sj}\, x_j \right) +$$

$$+ \sum_{j \in J} c_j\, x_j = \sum_{s \in I} c_s\, \bar{x}_s - \sum_{j \in J} x_j \left(\sum_{s \in I} c_s\, g_{sj} - c_j \right),$$

unde, înlocuind: $\sum_{s \in I} c_s \bar{x}_s = \bar{z}$ și $\sum_{s \in I} c_s\, g_{sj} = z_j$, obținem

$$z + \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j = \bar{z}. \tag{I.5.19}$$

Se construiește *problema mărită* adăugînd sistemului format de ecuațiile (I.5.18) și (I.5.19) o *restricție artificială*:

$$x_0 + \sum_{j \in J} x_j = M\,; \qquad x_0 \geqslant 0, \tag{I.5.20}$$

M fiind un număr pozitiv oricît de mare. Bazei B a problemei inițiale îi corespunde baza

$$B_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

a problemei mărite. Soluția asociată bazei B_m este

$$x_s = \bar{x}_s\,; \qquad s \in I.$$

$$x_0 = M.$$

Să căutăm o altă soluție de bază înlocuind variabila x_0 prin x_k, k fiind definit prin condiția

$$z_k - c_k = \max_{j \in J} [z_j - c_j]. \tag{I.5.21}$$

Aceasta înseamnă să înlocuim în ecuaţiile (I.5.18) şi (I.5.19) x_k prin expresia ei dată de ecuaţia (I.5.20), adică

$$x_k = M - x_0 - \sum_{j \in J-\{k\}} x_j.$$

Ecuaţia (I.5.19) devine

$$z + \sum_{j \in J-\{k\}} (z_j - c_j)x_j + (z_k - c_k)(M - x_0 - \sum_{j \in J-\{k\}} x_j) = \bar{z}$$

sau

$$z - (z_k - c_k)x_0 + \sum_{j \in J-\{k\}} [(z_j - c_j) - (z_k - c_k)]x_j = \tag{I.5.22}$$

$$= \bar{z} - (z_k - c_k)M.$$

Din (I.5.22) se vede că toate diferenţele $z'_j - c'_j$ corespunzătoare mulţimii vectorilor care nu aparţin noii baze sînt negative sau nule, deci s-a obţinut o soluţie de bază dual-realizabilă.

Plecînd cu această soluţie iniţială în aplicarea algoritmului simplex dual se ajunge după un număr finit de iteraţii la unul din următoarele trei rezultate:

1°. *Problema mărită nu are o soluţie realizabilă.* În acest caz, nici problema iniţială nu are o soluţie realizabilă, deoarece soluţiile acestor probleme nu diferă decît prin adăugarea sau omiterea valorii

$$\bar{x}_0 = M - \sum_{j \in J} \bar{x}_j,$$

care este totdeauna pozitivă, deoarece M este un număr pozitiv, oricît de mare.

2°. *Problema mărită are o soluţie optimă şi x nu este variabilă de bază.* În acest caz, restricţia artificială (I.5.20) pentru soluţia optimă este

$$\sum_{j \in J} \bar{x}_j = M$$

şi variabilele bazice sînt funcţii de M şi, în general, soluţia optimă nu este finită deoarece M poate lua valori pozitive oricît de mari.

3°. *Problema mărită are o soluţie optimă şi x_0 este o variabilă de bază.* În acest caz, baza corespunzătoare soluţiei optime este de forma

$$B_m = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_0^B \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad \text{şi} \quad B_m^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_0^B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția asociată bazei optime este

$$\bar{x} = B_m^{-1} d_m = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_0^B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M - \alpha_0^B B^{-1} d \\ B^{-1} d \end{bmatrix},$$

deci singura componentă a cărei valoare depinde de M este $\bar{x}_0$. Componentele vectorului $\bar{x}$, din care excludem pe $\bar{x}_0$, constituie soluția optimă a problemei inițiale. Din acest raționament se mai deduce că în cursul iterațiilor necesare pentru optimizarea soluției, imediat ce variabila x_0 intră în bază, se poate suprima din tabel linia corespunzătoare restricției artificiale.

Exemplul II. Să se determine soluția nenegativă a sistemului

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &\leqslant -6, \\ x_2 + x_3 - 1/4x_4 &\leqslant 3, \\ -4x_1 - x_3 + 2x_4 &\leqslant -3, \end{aligned}$$

care minimizează funcția

$$5x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = z.$$

Variabilele x_2 și x_4 au coeficienții negativi în funcția obiectiv astfel că diferențele $z_2 - c_2$ și $z_4 - c_4$ sînt pozitive pentru baza formată din vectorii asociați variabilelor de abatere. Pentru determinarea unei soluții dual-realizabile se construiește problema mărită. Astfel, avem sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_5 &= -6, \\ x_2 + x_3 - 1/4x_4 + x_6 &= 3, \\ -4x_1 - x_3 + 2x_4 + x_7 &= -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_0 &= M \end{aligned}$$

și aceeași funcție obiectiv.

În iterația 0 avem $z_2 - c_2 = \max\limits_{j \in I_1} [z_j - c_j]$, deci a_2 înlocuiește în bază pe a_0. După această schimbare a bazei soluția devine dual-realizabilă și se poate aplica algoritmul dual simplex. M fiind un număr pozitiv oricît de mare, în iterația 1 variabila $x_6 = 3 - M$ este negativă, deci vectorul a_6 iese din bază. Se calculează rapoartele dintre valorile $z_j - c_j$; $j \in J$ și elementele negative ale liniei a_6 pentru determinarea vectorului care intră în bază. Aceste rapoarte sînt $\frac{9}{1}$ și $2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$; ultimul fiind minim, vectorul a_4 îl înlocuiește pe a_6 în bază. În a doua iterație $x_7 = 9/5 - 8/5M$, deci este negativ pentru valori suficient de mari ale lui M.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul iteraţiilor — metoda simplex dual

(32)

c_B ↓	$c_j \rightarrow$		0	0	0	0	5	−4	3	−2
	Baza	d	a_5	a_6	a_7	a_8	a_1	a_2	a_3	a_4
0	a_5	−6	1				3	−4	2	0
0	a_6	3		1			0	1	1	−1/4
0	a_7	−3			1		−4	0	−1	2
0	←a_8	M				1	1	1*	1	1
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	−5	4	−3	2
	a_5	−6 +4M	1			4	7		6	4
	←a_6	3 −M		1		−1	−1		0	−5/4*
	a_7	−3			1	0	−4		−1	2
−4	→a_2	M				1	1	1	1	1
	$z_j - c_j$	−4 M	0	0	0	−4	−9	0	−7	−2
	a_5	18/5 +4/5 M	1	16/5		4/5	19/5		6	
−2	→ a_4	−12/5 +4/5 M		−4/5		4/5	4/5		0	1
	← a_7	9/5 −8/5 M		8/5	1	−8/5	−28/5*		−1	
−4	a_2	12/5 +1/5 M		4/5		1/5	1/5	1	1	
	$z_j - c_j$	−72/5−12/5 M	0	−8/5	0	−12/5	−37/5		0−7	0
	←a_5	135/28 −2/7 M	1	30/7	19/28	−2/7*			149/28	
−2	a_4	−15/7 +4/7 M		−4/7	1/7	4/7			−1/7	1
5	→a_1	−9/28 +2/7 M		−2/7	−5/28	2/7	1		5/28	
−4	a_2	69/28 +1/7 M		6/7	1/28	1/7		1	27/28	
	$z_j - c_j$	−33/14 −2/7M	0	−26/7	−37/28	−2/7	0	0	−159/28	0
	a_8	−135/8 +M	−7/2	−15	−19/8	1			−149/8	
−2	a_4	15/2	2	8	3/2				21/2	1
5	a_1	9/2	1	4	1/2		1		11/2	
−4	a_2	39/8	1/2	3	3/8			1	29/8	
	$z_j - c_j$	−12	−1	−8	−2	0	0	0	−11	0

Scanned with OKEN Scanner

În linia a_7 există elemente negative, deci se poate determina vectorul care intră în bază. Continuînd aplicarea algoritmului dual se obține soluția optimă în iterația a patra.

4. Algoritmul parametric auto-dual

La punctul precedent s-a văzut că determinarea unei soluții dual-realizabile necesită, în cazul general, adăugarea unei restricții suplimentare. Algoritmul parametric auto-dual conduce la determinarea soluției optime în cazurile în care nici baza formată din vectorii variabilelor de abatere și nici complimentarea ei dual nu corespund unor soluții realizabile, fără a mări modelul prin adăugarea unei restricții suplimentare.

Vom expune algoritmul pentru o problemă de minim. Fie B o bază a sistemului de restricții pentru care vectorul soluție x are și componente negative, iar condițiile de optimalitate nu sînt îndeplinite pentru toți vectorii care nu aparțin bazei. Se știe că această ultimă ipoteză este echivalentă cu afirmația că soluția problemei duale nu este realizabilă. Sistemul de ecuații al problemei primale, explicitat în raport cu variabilele bazice, se scrie sub forma

$$x_s + \sum_{j \in J} a_{ij}\, x_j = \bar{x}_s\,; \quad s \in I.$$

Fie I_1 mulțimea indicilor s corespunzători componentelor negative ale vectorului soluție $\bar{x}$. Acest vector constituie o soluție realizabilă dacă toate componentele $\bar{x}_s\,;\ s \in I_1$ devin pozitive. Dacă se adaugă un număr θ fiecărui $\bar{x}_s < 0$ se poate determina o valoare θ_1 a acestui parametru, pentru care să avem

$$\bar{x}_s + \theta_1 \geqslant 0\,; \qquad s \in I_1.$$

Pe de altă parte, fie J_1 mulțimea indicilor atașați vectorilor a_j care nu aparțin bazei și cărora le corespund diferențele $z_j - c_j = -\bar{c}_j > 0$. Soluția $\bar{x}$ este optimă dacă toate aceste diferențe devin negative. Adunînd fiecărui $-\bar{c}_j\,;\ j \in J_1$ parametrul θ se poate determina o valoare θ_1' pentru θ, astfel ca

$$\theta_1' - \bar{c}_j \leqslant 0\,; \qquad j \in J_1.$$

Pentru toate valorile parametrului θ care satisfac condiția

$$\theta \geqslant \bar{\theta}_1 = \max\,\{\theta_1,\ \theta_1'\}$$

soluția $\bar{x}$ este optimă. Dacă θ ia valori mai mici decît $\bar{\theta}_1$, dar foarte apropiate de această valoare, se prezintă una din următoarele situații:

1) dacă $\theta_1 > \theta_1'$, o componentă a vectorului $\bar{x}$ devine negativă dar toate diferenţele $z_j - c_j$; $j \in J$ sînt negative, deci dispunem de o soluţie dual-realizabilă şi aplicăm algoritmul simplex dual ;

2) dacă $\theta_1 < \theta_1'$, toate componentele vectorului $\bar{x}$ rămîn pozitive pentru valorile lui θ mai mici decît $\overline{\theta}_1$ şi foarte apropiate de $\overline{\theta}_1$, dar una din diferenţele $z_j - c_j$; $j \in J$ devine pozitivă, deci dispunem de o soluţie primal-realizabilă şi aplicăm algoritmul simplex-primal pentru îmbunătăţirea soluţiei ;

3) dacă $\theta_1 = \theta_1'$, pentru orice valoare a parametrului $\theta < \overline{\theta}_1$ nici soluţia $\bar{x}$, nici complimentara ei dualâ nu sînt realizabile. În acest caz se folosesc parametrii diferiţi λ şi θ pentru $\bar{x}_s$ şi $-\bar{c}_j$ şi se consideră variaţia unui singur parametru care conduce la una din situaţiile analizate anterior.

Se dovedeşte că aplicînd problemei parametrizate unul din algoritmele simplex, se determină o nouă soluţie de bază $\bar{\bar{x}}$ care este optimă pentru $\overline{\theta}_2 \leqslant \theta \leqslant \overline{\theta}_1$. Repetînd raţionamentul pentru valorile $\theta < \overline{\theta}_2$ se obţine un şir de valori descrescătoare pentru θ şi se ajunge, după un număr finit de iteraţii, la o soluţie optimă pentru $\theta = \overline{\theta}_k$. Dacă $\overline{\theta}_k = 0$, baza acestei iteraţii este optimă pentru problema iniţială şi soluţia se obţine luînd $\theta = 0$, iar dacă $\overline{\theta}_k \neq 0$ problema nu are nici o soluţie realizabilă.

Exemplul III. Să aplicăm algoritmul auto-dual pentru a determina soluţia optimă a problemei enunţate în exemplul II. Baza formată din vectorii a_5, a_6, a_7 corespunde soluţiei $x_5 = -6$; $x_6 = 3$; $x_7 = 3$. În problema parametrizată se ia $x_5 = -6 + \theta$ şi $x_7 = -3 + \theta$; pentru $\theta = \theta_1 \geqslant 6$ soluţia este realizabilă. Pe de altă parte, diferenţele $z_2 - c_2 = 4$ şi $z_4 - c_4 = 2$ se înlocuiesc cu $4 - \theta$ şi $2 - \theta$. Condiţiile $z_j - c_j \leqslant 0$ pentru toţi vectorii care nu aparţin bazei sînt îndeplinite dacă $\theta = \theta_1' \geqslant 4$. Soluţia asociată bazei a_5, a_6, a_7 este optimă pentru orice $\theta \geqslant \max\{\theta_1, \theta_1'\} = \max\{6, 4\} = 6$. Dacă $\theta < 6$, dar apropiat de această valoare, x_5 devine negativ dar criteriile de optimalitate rămîn satisfăcute şi soluţia este dual-realizabilă. Se aplică algoritmul dual-simplex ; vectorul a_2 înlocuieşte în bază pe a_5.

Soluţia asociată bazei (a_2, a_6, a_7) este optimă pentru valorile parametrului $\theta \geqslant 4$. Pentru $\theta < 4$, dar suficient de apropiate de 4, diferenţa $z_1 - c_1$ devine negativă dar soluţia rămîne realizabilă. Se aplică algoritmul primal simplex: a_5 înlocuieşte pe a_6 în bază. În iteraţia 2 soluţia este optimă pentru valorile $\theta \geqslant 3$; dacă $\theta < 3$ valoarea variabilei x_7 devine negativă. Algoritmul dual conduce la baza (a_2, a_5, a_1) optimală pentru $\theta \geqslant \frac{2}{5}$; cînd $\theta < \frac{2}{5}$ diferenţa $z_4 - c_4$ din

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul iteraţiilor — metoda auto-dual

(33)

Iteraţie	c_B ↓	Baza	$c_j \rightarrow$ / d	0 / a_5	0 / a_6	0 / a_7	5 / a_1	−4 / a_2	3 / a_3	−2 / a_4	
0	0	←a_5	$-6+\theta$	1			3	−4*	2	0	
	0	a_6	3		1		0	1	1	−1/4	$\theta<6$
	0	a_7	$-3+\theta$			1	−4	0	−1	2	
		z_j-c_j	0	0	0	0	-5	$4-\theta$	−3	$2-\theta$	
1	−4	→a_2	$3/2-1/4\ \theta$	−1/4			−3/4	1	−1/2	0	
	0	←a_6	$3/2+1/4\ \theta$	1/4*	1		3/4		3/2	−1/4	$\theta<4$
	0	a_7	$-3+\theta$	0		1	−4		−1	2	
		z_j-c_j	$-6+\theta$	$1-1/4\ \theta$	0	0	$-2-3/4\theta$	0	$-1-1/2\theta$	$2-\theta$	
2	−4	a_2	3		1		0	1	1	−1/4	
	0	→a_5	$6+\theta$	1	4		3		6	−1	$\theta<3$
	0	←a_7	$-3+\theta$		0	1	−4*		−1	2	
		z_j-c_j	−12	0	$-4+\theta$	0	-5	0	$-7+\theta$	$3-5/4\theta$	
3	−4	a_2	3		1	0		1	1	−1/4	
	0	←a_5	$15/4+7/4\ \theta$	1	4	3/4			21/4	1/2*	$\theta<\frac{2}{5}$
	5	→a_1	$3/4-1/4\ \theta$		0	−1/4	1		1/4	−1/2	
		z_j-c_j	$-33/4-5/4\ \theta$	0	$-4+\theta$	−5/4	0	0	$-23/4+\theta$	$1/2+5/4\theta$	
4	−4	a_2	$39/8+7/8\ \theta$	1/2	3	3/8		1	29/8		
	−2	a_4	$15/2+7/2\ \theta$	2	8	3/2			21/2	1	$\theta=0$
	5	a_1	$9/2+3/2\ \theta$	1	4	1/2	1		11/2		
		z_j-c_j	$-12-18\ \theta$	$-1-5/2\theta$	$-8-9\theta$	$-2-15/8\theta$	0	0	$-11-97/8\theta$	0	

Scanned with OKEN Scanner

iteraţia 3 devine pozitivă, deci se aplică din nou algoritmul simplex primal care conduce la soluţia din iteraţia 4. Această soluţie este optimă pentru orice $\theta \geqslant 0$. Luînd $\theta = 0$ se obţine soluţia optimă a problemei iniţiale: $x_1 = 9/2$; $x_2 = 39/8$; $x_3 = 0$; $x_4 = 15/2$, pentru care funcţia obiectiv ia valoarea $z = -12$. Rezultatele obţinute prin această metodă coincid cu cele determinate prin algoritmul dual-simplex şi în ambele cazuri au fost necesare patru iteraţii pentru optimizarea soluţiei.

§ 6. ALGORITMUL PRIMAL-DUAL

1. Expunerea metodei

Algoritmul primal-dual este o extindere a „metodei ungare", fundamentată de Egervary pentru problemele de transport. G. B. Dantzig[21] extinde acest procedeu pentru problemele generale de programare liniară. Pentru expunerea metodei să considerăm problema scrisă sub forma folosită în simplexul revizuit:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = d_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = d_2,\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = d_m,
\end{aligned} \tag{I.6.1}$$

$$a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \ldots + a_{0n}x_n + w = d_0, \tag{I.6.2}$$

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n - z = 0; \tag{I.6.3}$$

$$x_i \geqslant 0; \quad i = 1, 2, \ldots, n+m.$$

Reamintim că

$$a_{0j} = \sum_{i \in M} a_{ij} \qquad \text{pentru } j \in N$$

$$d_0 = \sum_{i \in M} d_i; \qquad di \geqslant 0,$$

şi

$$w = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}.$$

Se precizează că problema cere minimizarea funcţiei z care apare în ecuaţia (I.6.3). Admitem că problema are o soluţie dual-realizabilă. Dacă toţi coeficienţii c_j ai funcţiei obiectiv sînt nenegativi, so-

Scanned with OKEN Scanner

luţia $x_i = 0$, $i \in M$; $x_{n+p} = d_p$; $p = 1, 2, \ldots, m$ este dual-realizabilă, deoarece coeficienţii variabilelor x_{n+p} ; $p = 1, 2, \ldots, m$ în funcţia z sînt nuli, deci toate diferenţele $z_j - c_j = -c_j \leqslant 0$ pentru cazul în care $c_j \geqslant 0$. Dacă această condiţie nu este îndeplinită se determină o soluţie dual-realizabilă, aşa cum s-a arătat în § 5, punctul 3, cazul II. Plecînd de la această soluţie dual-realizabilă se foloseşte metoda simplex revizuită pentru minimizarea funcţiei w, care este suma variabilelor artificiale. O dată ce o variabilă artificială iese din bază, această variabilă se exclude din sistem, deoarece ea nu mai poate reintra în bază. Să admitem că după t iteraţii baza mai conţine q variabile artificiale, deci au fost excluse $(m-q)$; sistemul mai conţine $(n+m) - (m-q) = n+q$ variabile. După rearanjarea şi renumerotarea variabilelor, tabelul coeficienţilor sistemului (I.6.1) — (I.6.3) în iteraţia t este:

Tabelul coeficienţilor în iteraţia t

(34)

Baza				Variabile care nu aparţin bazei		Constante
Variabile artificiale		Variabile de structură				
x_1	x_q	x_{q+1}	x_m	x_{m+1} x_{m+p}	x_{m+p+1} x_{n+q}	
1				$\bar{a}_{1,m+1} \ldots \bar{a}_{1,m+p}$	$\bar{a}_{1,m+p+1} \ldots \bar{a}_{1,n+q}$	$\bar{d}_1$
	1			$\bar{a}_{2,m+1} \ldots \bar{a}_{2,m+p}$	$\bar{a}_{2,m+p+1} \ldots \bar{a}_{2,n+q}$	$\bar{d}_2$
		1				
			1			
				$\bar{a}_{m,m+1} \ldots \bar{a}_{m,m+p}$	$\bar{a}_{m,m+p+1} \ldots \bar{a}_{m,n+q}$	$\bar{d}_m$
0	0	0	0	$\bar{a}_{0,m+1} \ldots \bar{a}_{0,m+p}$	$\bar{a}_{0,m+p+1} \ldots \bar{a}_{0,n+q}$	$\bar{d}_0 - w$
		0	0	0 0	$\bar{c}_{m+p+1} \ldots \bar{c}_{n+q}$	$\bar{z}_0 - z$
				$\bar{c}_j = 0$	$\bar{c}_j < 0$	

Scanned with OKEN Scanner

Remarcăm următoarele:

1°. Soluția primală asociată soluției duale din tabelul iterației t este realizabilă deoarece toți $\bar{d}_i \geqslant 0$.

2°. Coeficienții ecuației w din penultima linie a tabelului (34) sînt σ_j, multiplicatorii simplex ai bazei relativi la ecuația w.

3°. Coeficienții ecuației z constituie o soluție realizabilă a problemei duale (nu se consideră variabilele artificiale).

Se observă cu ușurință că în cazul în care $\bar{d}_0 = 0$, soluția găsită este optimă. În adevăr, $\bar{d}_0 = 0$ înseamnă $w = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m} = 0$, dar o sumă de mărimi pozitive nu poate fi nulă decît dacă fiecare mărime este nulă, deci $\bar{d}_0$ poate fi nul dacă și numai dacă toate variabilele artificiale au valori nule în soluția găsită. Această soluție satisface deci și sistemul inițial. Pe de altă parte, toate componentele soluției sînt nenegative ($\bar{d}_i \geqslant 0$; $i \in M$) și condițiile de optim sînt îndeplinite, deoarece toate prețurile comparative $\bar{c}_j$ sînt nepozitive.

În baza acestor observații se construiește metoda primal-dual ă.

Pasul I constă în minimizarea funcției w a unei probleme primale restrînse. Pentru construirea acestei probleme admitem că în momentul în care se începe iterația t există una sau mai multe variabile care nu aparțin bazei, cărora le corespund prețuri comparative $c_j = 0$.

Problema primală restrînsă se formează reținînd numai variabilele din bază și acele variabile care nu aparțin bazei x_j pentru care $c_j = 0$. Acestea din urmă servesc pentru alegerea pivotului în scopul minimizării funcției w, folosind algoritmul simplex revizuit. La sfîrșitul aplicării algoritmului se pot prezenta următoarele situații:

a) $\bar{d}_0 = 0$; în acest caz soluția găsită este soluția optimă a problemei inițiale;

b) $\bar{d}_0 > 0$ și toți $\bar{a}_{0j} \leqslant 0$ $j \in N$; problema inițială nu are o soluție realizabilă;

c) $\bar{d}_0 > 0$ și există $\bar{a}_{0j} \geqslant 0$; atunci se trece la pasul II.

Pasul II constă în îmbunătățirea soluției duale prin găsirea unei noi probleme primale restrînse. Pentru aceasta se folosesc noi multiplicatori:

$$\pi_i^* = \pi_i + k\sigma_i; \qquad i \in M, \tag{I.6.4}$$

care generează factori de cost pozitivi

$$\bar{c}_j^* = \bar{c}_j + k\bar{a}_{0j}, \tag{I.6.5}$$

unde k este un număr pozitiv, definit prin condiția

$$k = \frac{-\bar{c}_s}{\bar{a}_{0s}} = \min_{\bar{a}_{0s}>0} \frac{-\bar{c}_j}{\bar{a}_{0s}}. \tag{I.6.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Noua primală restrînsă conține toate variabilele din bază și acele variabile care nu aparțin bazei x_j pentru care factorii de cost c_j^* sînt nuli. Este evident că în cazul în care valoarea dată de (I.6.5) nu este unic determinată, apar mai multe variabile care nu aparțin bazei în noua problemă primală restrînsă. În orice caz, este necesară cel puțin o nouă iterație pentru determinarea minimului funcției w. Dacă problema nu este degenerată, fiecare iterație conduce la o descreștere a valorii d_0 și după un număr finit de iterații se ajunge fie la soluția optimă (cazul a), fie la dovada că problema inițială nu are o soluție realizabilă (cazul b).

Dacă nu toate variabilele x_{n+p}; $p = 1, \ldots, m$ sînt artificiale nu apare nici o modificare în aplicarea algoritmului: w poate include numai variabilele artificiale sau toate variabilele necesare transformării restricțiilor în ecuații. În ipoteza a doua, condiția $\bar{d}_0 = 0$ nu mai este necesară pentru existența soluției optime și se înlocuiește cu condiția ca nici o variabilă artificială să nu intre în soluție cu valoare nenulă.

2. Primala restrinsă inițială

Dacă în problema care trebuie rezolvată toți coeficienții funcției de eficiență c_j sînt pozitivi, întrebarea care se pune este cum se construiește problema primală restrînsă inițială? În acest caz, aplicarea algoritmului se începe prin găsirea unei soluții duale îmbunătățite, așa cum arată pasul II.

3. Algoritmul metodei primal-duale

În esență, algoritmul metodei primal-duale constă în următoarele:

a) se determină o soluție de bază dual-realizabilă;

b) se asociază acestei soluții o problemă primală restrînsă, obținută din primala inițială reținînd numai variabilele bazice și acele variabile nebazice cărora le corespund prețuri comparative nule, și se aplică algoritmul simplex revizuit în scopul minimizării funcției w, formate din suma variabilelor artificiale.

Aplicarea algoritmului conduce la o soluție optimă și pentru primala inițială, dacă $\min w = 0$. Dacă nu s-a ajuns la o astfel de soluție se îmbunătățește soluția duală, așa cum arată pasul II; se construiește o altă primală restrînsă și se reia aplicarea algoritmului.

După un număr finit de iterații se ajunge la soluția optimă a primalei inițiale sau se pune în evidență inexistența soluției optime a problemei studiate.

Scanned with OKEN Scanner

Avantajele metodei primal-duale apar în problemele cu un număr mare de necunoscute. Un prim avantaj este că problemele succesive folosite în iteraţiile metodei primal-duale reţin numai un număr redus de variabile. Un al doilea avantaj constă în înlocuirea criteriului de intrare a unui vector în bază. Metoda simplex primală foloseşte criteriul

$$z_k - c_k = \max_{j \in J_1} |z_j - c_j|,$$

unde J_1 este mulţimea indicilor vectorilor care nu aparţin bazei şi corespund diferenţelor $z_j - c_j > 0$. Acest criteriu se înlocuieşte prin criteriul de determinare a variabilei care se include în noua primală restrînsă şi anume:

$$k = \min_{j | a_{0j} > 0} \left[\frac{-c_j}{a_{0j}} \right].$$

4. Exemple de aplicare a metodei primal-duale

Pentru clarificarea aplicării acestei metode se vor rezolva cîteva exemple, care diferă prin modul în care se iniţiază aplicarea algoritmului.

Exemplul I. Coeficienţii tuturor variabilelor de structură în funcţia obiectiv sînt pozitivi.

Să se minimizeze funcţia

$$z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4, \tag{I.6.7}$$

cu condiţia ca variabilele să satisfacă restricţiile

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &\geqslant 2, \\ 6x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 &\geqslant 5, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 &\geqslant 6. \end{aligned} \tag{I.6.8}$$

Pentru aceasta se transformă sistemul (I.6.8) în sistem de ecuaţii. Toate variabilele necesare acestei transformări sînt variabile artificiale. Sistemul se completează astfel:

— cu o ecuaţie găsită însumînd relaţiile (I.6.8) transformate în egalităţi şi înlocuind cu w suma variabilelor artificiale;

— cu ecuaţia

$$z - \sum_{j=1}^{4} c_j x_j = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul coeficienţilor sistemului construit în acest fel este următorul:

(35)

Baza	Variabile de structură				Variabile artificiale			w	z	Constante
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7			
x_5	5	−2	1	−3	1					2
x_6	6	1	−5	3		1				5
x_7	−1	4	3	7			1			6
w	10	3	−1	7				1		13
z	−3	−4	−1	−6					1	0

Soluţia care se citeşte din acest tabel este $x_5 = 2$; $x_6 = 5$; $x_7 = 6$; $w = 13$; $z = 0$. Această soluţie este realizabilă şi optimă pentru problema extinsă cu funcţia obiectiv (I.6.7), deoarece variabilele din bază au coeficienţi nuli în această funcţie şi deci diferenţele $z_j - c_j$ sînt negative pentru toţi $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Totuşi, soluţia nu este optimă pentru problema iniţială, deoarece $w \neq 0$. Condiţiile de optimalitate fiind îndeplinite, soluţia anterioară este şi dual-realizabilă pentru funcţia obiectiv (I.6.7). Această soluţie se îmbunătăţeşte determinînd cel mai mare număr k pentru care funcţia $z + kw$ are toţi coeficienţii nenegativi, deci avem

$$z_1 = z + kw = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 + k(13 - 10x_1 - -3x_2 + x_3 - 7x_4) = (3 - 10k)x_1 + (4 - 3k)x_2 + + (1 + k)x_3 + (6 - 7k)x_4 + 13k;$$

$$k = \min_{j/a_{0j}>0} \left[\frac{-c_j}{a_{0j}}\right] = \min \left[\frac{3}{10}; \frac{4}{3}; \frac{6}{7}\right] = \frac{3}{10}. \qquad \text{(I.6.9)}$$

Luînd pentru k valoarea găsită în (I.6.9), avem

$$z_1 = 0x_1 + \frac{31}{10}x_2 + \frac{13}{10}x_3 + \frac{39}{10}x_4 + \frac{39}{10}, \qquad \text{(I.6.10)}$$

unde z_1 este o funcţie în care x_1 are coeficient nul. Problema primală restrînsă se găseşte acum reţinînd din problema iniţială numai variabilele din bază şi variabila x_1, adică $(x_5, x_6, x_7; x_1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Primala restrînsă inițială. Iterația 0

(36)

Variabile din bază	Inversa bazei x_5	x_6	x_7	w	z	Constante	$x_s = x_1$
$\leftarrow x_5$	1					2	5*
x_6		1				5	6
x_7			1			6	−1
w				1		13	10
z					1	0	−3

Iterația 1

(37)

x_1	1/5				2/5
$\leftarrow x_6$	−6/5	1			13/5
x_7	1/5		1		32/5
w	−2			1	9
z	3/5				6/5

Factori relativi de cost

(38)

Iterația		Variabile x_1	x_2	x_3	x_4
$\bar{a}_{0j}$	0	10	3	−1	7
	1	0	7	−3	13
	2	0	10/33	304/33	0
	3	0	−14	0	0
$\bar{c}_j$	0	−3	−4	−1	−6
	1	0	−26/5	−2/5	−9/5
	2	0	−13/11	−85/11	0
	3	0	−141/152	0	0

Scanned with OKEN Scanner

Îmbunătăţirea soluţiei primalei restrînse se face utilizînd algoritmul simplex revizuit. Variabila x_1 înlocuieşte în bază pe x_5 şi soluţia din iteraţia 1 este optimă pentru această problemă, dar $w = 9$, deci soluţia nu este optimă şi pentru problema iniţială. Din tabelul factorilor relativi de cost în care sînt completate numai primele două linii pentru $\bar{a}_{0j}$ şi $\bar{c}_j$, în stadiul de lucru în care ne găsim putem scrie expresia funcţiei w astfel:

$$w = 9 + 0 \cdot x_1 - 7x_2 + 3x_3 - 13x_4 \qquad \text{(I.6.11)}$$

Pentru determinarea noii primale restrînse căutăm o valoare pentru k, astfel încît $z_2 = z_1 + kw_1$, z_1 şi w_1 fiind daţi de (I.6.10) şi (I.6.11), să aibă toţi coeficienţii pozitivi. Astfel avem

$$z_2 = 0 \cdot x_1 + \frac{31}{10} x_2 + \frac{13}{10} x_3 + \frac{39}{10} x_4 + \frac{39}{10} + k(9 + 0 \cdot x_1 - 7x_2 +$$

$$+ 3x_3 - 13x_4) = 0 \cdot x_1 + \left(\frac{31}{10} - 7k\right)x_2 + \left(\frac{13}{10} + 3k\right)x_3 +$$

$$+ \left(\frac{39}{10} - 13k\right)x_4 + \frac{39}{10} + 9k,$$

$$k = \min\left[\frac{31}{70}, \frac{39}{10 \cdot 13}\right] = \frac{39}{10 \cdot 13} = \frac{3}{10},$$

deci

$$z_2 = 0 \cdot x_1 + x_2 + \frac{11}{5} x_3 + 0 \cdot x_4 + \frac{33}{5}. \qquad \text{(I.6.12)}$$

Deoarece x_4 are coeficientul nul în z_2, noua primală restrînsă conţine variabilele $(x_1, x_6, x_7 ; x_4)$.

A doua primală restrînsă

(39)

Variabile din bază	Inversa bazei			w	z	Constante	$x_5 = x_4$
	x_5	x_6	x_7				
x_1	1/5					2/5	−3/5
←x_6	−6/5	1				13/5	33/5*
x_7	1/5		1			32/5	32/5
w	−2			1		9	13
z	+3/5				1	6/5	−39/5

Iteraţia 2

(40)

$x_5 = x_3$

x_1	1/11	1/11		7/11	−12/33
x_4	−2/11	5/33		13/33	−31/33
x_7	15/11	−32/33	1	128/33	304/33*
w	4/11	−65/33	1	128/33	304/33
z	−9/11	39/33	1	47/11	−85/11

Se observă că soluţia iniţială a celei de-a doua probleme primale restrînsă este identică cu soluţia optimă a primalei precedente, deci iteraţia 2 se poate construi fără a transcrie coeficienţii noii probleme. După intrarea variabilei x_4 în bază soluţia este optimă pentru problema considerată, dar $w = 128/33$, deci nu este optimă şi pentru cea dată. Din tabelul factorilor relativi de cost în care s-a completat acum şi linia a doua atît pentru $\bar{a}_{0j}$ cît şi pentru $\bar{c}_j$, avem

$$w_2 = 128/33 - 0 \cdot x_1 - \frac{10}{33} x_2 - \frac{304}{33} x_3 - 0 \cdot x_4. \qquad \text{(I.6.13)}$$

Pentru a forma a treia primală restrînsă construim $z_3 = z_2 + kw_2$, unde z_2 şi w_2 sînt daţi de relaţiile (I.6.12) şi (I.6.13). Astfel avem

$$z_3 = z_2 + kw_2 = 0 \cdot x_1 + x_2 + \frac{11}{5} x_3 + 0 \cdot x_4 + \frac{33}{5} +$$

$$+ k(128/33 - 0 \cdot x_1 - 10/33 x_2 - 304/33 x_3 - 0 \cdot x_4) = 0 \cdot x_1 +$$

$$+ \left(1 - \frac{10}{33} k\right) x_2 + \left(\frac{11}{5} - \frac{304}{33} k\right) x_3 + 0 \cdot x_4 + \frac{33}{5} + \frac{128}{33} k;$$

$$k = \min \left[\frac{33}{10}; \frac{11 \cdot 33}{5 \cdot 304}\right] = \frac{11 \cdot 33}{5 \cdot 304}.$$

Prin urmare,

$$z_3 = 0 \cdot x_1 + \frac{141}{152} x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + \frac{143}{19}. \qquad \text{(I.6.14)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest rezultat arată că a treia primală restrînsă conține variabilele $(x_1, x_4, x_7 ; x_3)$; x_3 exclude din bază pe x_7 și astfel avem :

Iterația 3

(41)

x_1	11/76	1/19	12/304		15/19
x_4	— 13/304	1/19	31/304		15/19
x_3	75/304	—2/19	33/304		8/19
w	—1	—1	—1	1	0
z	9/304	7/19	255/304	1	143/19

Soluția $x_1 = 15/19$; $x_2 = 0$; $x_3 = 8/19$; $x_4 = 15/19$ este optimă pentru problema inițială, deoarece $w = 0$.

Observații. În toate iterațiile și în tabelul factorilor relativi de cost rîndul z, respectiv $\bar{c}_j$, au fost completate cu coeficienții funcției z originale atașată problemei propuse. Se observă că, dacă determinarea valorilor k s-ar fi făcut folosind acești coeficienți, structura problemelor primale restrînse ar fi rămas nemodificată. În adevăr, din tabelul factorilor relativi de cost, rîndul 0 pentru $\bar{a}_{0j}$ și $\bar{c}_j$ determină

$$k_1 = \min_{j/a_{0j}>0} \left[\frac{-c_j}{a_{0j}}\right] = \min\left[\frac{3}{10} ; \frac{4}{3} ; \frac{6}{7}\right] = \frac{3}{10} .$$

Prima problemă restrînsă conține variabilele $(x_5, x_6, x_7 ; x_1)$, iar după aplicarea algoritmului baza este formată din (x_1, x_6, x_7).

Rîndul întîi din tabelul factorilor relativi de cost conduce la determinarea valorii k_1 :

$$k_2 = \min_{j/\bar{a}_{0j}>0} \left[\frac{-\bar{c}_j}{\bar{a}_{0j}}\right] = \min\left[\frac{26}{5 \cdot 7} ; \frac{9}{5 \cdot 13}\right] = \frac{9}{5 \cdot 13} .$$

A doua problemă restrînsă conține variabilele $(x_1, x_6, x_7 ; x_4)$, iar după aplicarea algoritmului baza este formată din (x_1, x_4, x_7).

Din linia a doua a aceluiași tabel obținem

$$k_3 = \min_{j/\bar{a}_{0j}>0} \left[\frac{-\bar{c}_j}{\bar{a}_{0j}}\right] = \min\left[\frac{13 \cdot 33}{11 \cdot 10} ; \frac{85 \cdot 33}{11 \cdot 304}\right] = \frac{85 \cdot 3}{304} .$$

Scanned with OKEN Scanner

A treia problemă restrînsă conține variabilele $(x_1, x_4, x_7; x_3)$, iar după aplicarea algoritmului conduce la baza optimală pentru care funcția obiectiv ia valoarea $z = 143/19$ egală cu cea care se obține înlocuind în z_3 variabilele cu valorile lor din soluția optimă.

Faptul că numărul k poate fi determinat fără a calcula coeficienții $\bar{c}_j$ reprezintă un avantaj în problemele cu un număr mare de necunoscute, fiindcă micșorează volumul calculelor necesare optimizării.

Exemplul II. Să se rezolve următoarea problemă:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 - x_5 &\geqslant 12, \\ 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 &\leqslant 16, \\ x_1 + x_3 + 2x_5 &\geqslant 20, \qquad \text{(I.6.15)} \\ x_2 + x_4 &\leqslant 10, \\ x_i \geqslant 0 \qquad i = 1, \ldots, 5; & \\ 3x_1 + x_3 + 4x_4 + 5x_5 = z \min. & \qquad \text{(I.6.16)} \end{aligned}$$

Fie x_6, x_7, x_8, x_9 variabilele care transformă inecuațiile (I.6.15) în ecuații; dintre acestea numai x_6 și x_8 sînt variabile de abatere. Dacă notăm

$$w = x_6 + x_7 + x_8 + x_9,$$

minimul acestei funcții poate fi diferit de zero și problema să admită totuși o soluție realizabilă. Scriind sistemul sub forma folosită în metoda simplex revizuită, tabelul coeficienților este:

Baza	Variabile de structură					Variabile artificiale și de abatere				w	z	Constante
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9			
x_6	2	3	−5	4	−1	1						12
x_7	0	4	2	2	3		1					16
x_8	1	0	1	0	2			1				20
x_9	0	1	0	1	0				1			10
w	3	8	−2	7	4					1		58
z	−3	0	−1	−4	−5						1	0

Scanned with OKEN Scanner

În funcția obiectiv, x_2 are coeficient nul deci primala restrînsă are variabilele $(x_6, x_7, x_8, x_9 ; x_2)$ și

$$z_1 = z = 3x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 4x_4 + 5x_5.$$

Criteriul simplex de ieșire a unui vector din bază arată că x_2 înlocuiește astfel variabila x_7, încît după prima iterație baza este (x_6, x_2, x_8, x_9).

Primala restrînsă inițială. Iterația 0

(43)

Variabile din bază	Inversa bazei				w	z	Constante	$x_s = x_2$
	x_6	x_7	x_8	x_9				
x_6	1						12	3
x_7		1					16	4*
x_8			1				20	0
x_9				1			10	1
w					1		58	8
z						1	0	0

Iterația 1

(44)

$x_s = x_2$

x_6	1	−3/4					0	2*
x_2		1/4					4	0
x_8		0	1				20	1
x_9		−1/4		1			6	0
w	0	−2	0	0	1	0	26	3
z	0	0	0	0	0	1	0	−3

În acest exemplu numerele k se vor determina numai prin formulele (I.6.6), deci este necesar calculul factorilor relativi de cost. Redăm tabelul acestor factori, care se completează pe măsură ce se construiesc iterațiile.

Scanned with OKEN Scanner

Factori relativi de cost

(45)

Iteraţia		Variabile				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\bar{a}_{0j}$	0	3	8	−2	7	4
	1	3	0	−6	3	−2
	2	0	0	15/4	−3/4	23/8
	3	0	0	0	6/17	−83/34
$\bar{c}_j$	0	−3	0	−1	−4	−5
	1	−3	0	−1	−4	−5
	2	0	0	−43/4	−1/4	−79/8
	3	0	0	0	−58/17	−12/17

Tabelul factorilor relativi de cost, linia iteraţiei 1, arată că numărul k este

$$k = \min\left[\frac{3}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\right] = \frac{3}{3},$$

deci a doua primală restrînsă cuprinde variabilele (x_6, x_2, x_8, x_9 ; x_1).

Se calculează componentele vectorului asociat variabilei x_1 în baza (x_6, x_2, x_8, x_9), folosind inversa bazei, şi aceste componente se înscriu în coloana alăturată tabelei din iteraţia 1. Rapoartele dintre constante şi componentele vectorului x_1 arată că x_6 este înlocuit în bază de x_1 şi avem :

Iteraţia 2

(46)

						$x_5 = x_3$
x_1	1/2	−3/8			0	−13/4
x_2	0	1/4			4	1/2
x_8	−1/2	3/8	1		20	17/4*
x_9	0	−1/4	1		6	−1/2
w	−3/2	−7/8	0	0	1 0	26	15/4
z	3/2	−9/8	0	0	0 1	0	−43/4

Scanned with OKEN Scanner

Iterația 3

(47)

x_1	2/17	−3/34	13/17				260/17
x_2	1/17	7/34	−2/17				28/17
x_3	−2/17	3/34	4/17				80/17
x_9	−1/17	−7/34	2/17	1			142/17
w	−18/17	−41/34	−15/17	0	1	0	142/17
z	4/17	−3/17	43/17	0	0	1	860/17

Variabila care intră în componența celei de-a treia primale restrînse este x_3, deoarece numai $\bar{a}_{03}$ este pozitiv în iterația 2; x_3 înlocuiește în bază pe x_8. Soluția găsită după iterația 3 dă $w = 142/17 \neq 0$, dar singura variabilă din bază care nu aparține sistemului inițial este x_9. Aceasta este o variabilă de abatere, deci soluția celei de-a treia primale restrînse este o soluție realizabilă și pentru problema inițială. Mai mult, pentru funcția obiectiv z coeficienții relativi de cost asociați variabilelor care nu aparțin bazei și nu sînt variabile de abatere sînt negativi, deci soluția este optimă. Procesul de îmbunătățire a soluției s-a încheiat. În problemele care conțin atît variabile de abatere, cît și variabile artificiale ar fi preferabil ca acestea din urmă să se noteze cu alte litere, pentru a atrage atenția asupra variabilelor care trebuie să se excludă din bază, sau să aibă valori nule pentru ca problema inițială să admită o soluție realizabilă. În exemplul studiat, prețurile comparative relative la funcția z, în iterația 3, sînt pozitive pentru x_6 și x_8. În cazul în care nu se reține că acestea sînt variabile de abatere, deci nu mai pot intra în bază după ce au fost excluse, se poate crea impresia că nu s-a ajuns la soluția optimă. Faptul că valorile $\bar{a}_{0j}$ corespunzătoare acestor $\bar{c}_j$ sînt negative semnalează totuși că x_6 și x_8 nu pot candida la intrarea în bază. Tabelul factorilor relativi de cost, pe linia iterației 3 conține valorile $a_{04} = 6/17$; $\bar{c}_4 = -58/17$ care ar justifica determinarea variabilei x_4 pentru construirea altei primale restrînse. Așa s-ar petrece lucrurile dacă toate variabilele adăugate sistemului inițial ar fi variabile de abatere, deci soluția optimă ar necesita min $w = 0$. În exemplul analizat, x_9 este variabilă artificială, deci poate intra în soluție cu valoare nenulă; condițiile de optim fiind îndeplinite, optimul corespunde valorii $w = 142/17$. Dacă s-ar construi o nouă primală restrînsă aceasta ar conține variabilele (x_1, x_2, x_3, x_9; x_4) și x_9 ar înlocui în bază pe x_2, ceea ce ar conduce la o valoare mai mare a funcției z.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

REOPTIMIZARE

§ 1. INTRODUCERE

Scopul reoptimizării este de a studia modificările care survin în soluţia optimă a unei probleme de programare liniară, atunci cînd se modifică datele problemei. Importanţa acestui studiu rezultă din economia de muncă ce se poate face reoptimizînd soluţia cunoscută, în loc de a reîncepe rezolvarea problemei de la capăt. Această economie de muncă este importantă chiar în situaţia în care se lucrează cu maşini electronice de calcul, dar mai ales atunci cînd problemele sînt rezolvate fără ajutorul maşinilor electronice de calcul.

Necesitatea de a modifica datele problemei apare frecvent în probleme practice. Să admitem că o întreprindere urmăreşte planificarea producţiei în scopul folosirii optime a utilajului. Datele pe care se va construi modelul matematic sînt: coeficienţii de utilizare a utilajului pentru fiecare tip de produs inclus în plan, cantităţile minime de produse care trebuie realizate, cantităţile de materie primă disponibilă, timpul de utilizare a fiecărei maşini-unelte etc. Să presupunem că soluţia problemei oferă planul optim de producţie pentru primul trimestru al anului, dar că în trimestrul al doilea apar unele modificări în datele pe baza cărora s-a construit modelul. De exemplu, o inovaţie modifică coeficienţii de utilizare a unei maşini-unelte sau a unei materii prime; obligaţia de a spori producţia la unele sortimente în trimestrul al doilea impune schimbarea cantităţilor de produse care trebuie obţinute; includerea în plan a unui nou produs măreşte numărul de variabile; reparaţiile planificate în acest trimestru modifică disponibilul de ore a utilajelor etc. Întrebarea care se pune în aceste ipoteze, care pot apărea separat sau simultan, este dacă soluţia optimă îşi păstrează caracterul de optimalitate şi după modificările survenite. Este necesară, în primul rînd, o verificare a soluţiei în noile condiţii. În situaţia în care verificarea conduce la concluzia că soluţia nu mai este optimă, se pune problema dacă se pot găsi metode de reoptimizare a soluţiei care să folosească rezultatele anterioare, micşorînd astfel volumul calculelor necesare determinării unei noi soluţii.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru aceasta este necesar să se dea răspuns la următoarele întrebări:

— cum se verifică optimalitatea soluției dacă s-au schimbat datele problemei;

— cum poate fi găsită noua soluție optimă.

În acest scop se vor studia separat cinci posibilități de modificare a coeficienților problemei, și anume ale:

— vectorului constantelor d;
— vectorului format din coeficienții funcției obiectiv c;
— unui vector-coloană a matricei A;
— unui vector-linie a matricei A;
— numărului restricțiilor sistemului;
— numărului variabilelor problemei.

Așa cum s-a arătat mai înainte, în practică pot apărea simultan două sau mai multe dintre aceste modificări; în acest caz se vor rezolva succesiv problemele referitoare la fiecare modificare în parte.

În toate cazurile vom presupune că modificarea datelor este discretă și cunoscută.

§ 2. CONSIDERAȚII GENERALE

Să considerăm o problemă de programare liniară scrisă sub forma standard

$$\begin{gathered} Ax = d, \\ x \geqslant 0; \\ \min[\max] z = cx. \end{gathered} \tag{II.2.1}$$

Fie B o bază și R matricea formată din vectorii matricei A care nu aparțin bazei B; x^B și x^R vectorii formați din componentele lui x asociate respectiv vectorilor care aparțin matricelor B și R. Cu aceste notații, sistemul de restricții al problemei (II.2.1) se scrie

$$Bx^B + Rx^R = d. \tag{II.2.2}$$

Înmulțind la stînga ecuația (II.2.2.) cu inversa bazei B avem

$$x^B + B^{-1}Rx^R = B^{-1}d. \tag{II.2.3}$$

Luînd $x^R = 0$ în (II.2.3) obținem soluția de bază

$$\bar{x}^B = B^{-1}d, \tag{II.2.4}$$

care este o soluție realizabilă dacă vectorul $B^{-1}d$ are toate componentele nenegative. Vectorul $\bar{x}^B$ este o soluție optimă dacă toate diferențele $z_j - c_j$, corespunzătoare vectorilor care nu aparțin bazei B, sînt negative sau nule în problemele de minim și pozitive sau nule în cele de maxim (v.cap. I, § 2). De asemenea se știe că

$$z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j. \tag{II.2.5}$$

Din formulele (II.2.4) și (II.2.5) rezultă:

a) Modificarea vectorului d schimbă soluția $\bar{x}^B$ asociată unei baze B; deci $\bar{x}^B$ poate deveni o soluție nerealizabilă cînd d se modifică. Criteriile de optimalitate însă, fiind independente de vectorul d, rămîn îndeplinite, deci $\bar{x}^B$ rămîne o soluție dual realizabilă pentru problema modificată prin schimbarea vectorului d.

b) Modificarea vectorului c lasă neschimbată soluția $\bar{x}^B$, dar schimbă valorile diferențelor $z_j - c_j$, care pot să nu mai satisfacă condițiile de optimalitate a soluției. În acest caz $\bar{x}^B$ rămîne o soluție realizabilă de bază, dar nu mai este soluție optimă a problemei modificate prin înlocuirea vectorului c.

§ 3. MODIFICAREA VECTORULUI CONSTANTELOR d

Fie dată problema de programare liniară cu modelul (II.2.1) pentru care se cunoaște soluția dată de (I.2.4). După rezolvarea problemei se impune înlocuirea vectorului d cu vectorul $d' = d + \delta d$. Noua soluție, asociată aceleiași baze B, este

$$\bar{x}'^B = B^{-1} d' = B^{-1}(d + \delta d) = B^{-1}d + B^{-1}(\delta d) =$$

$$= \bar{x}^B + B^{-1}(\delta d). \tag{II.3.1}$$

Se pot prezenta următoarele situații:

1°. Vectorul $\bar{x}'^B$ are toate componentele nenegative, adică

$$\bar{x}^B + B^{-1}(\delta d) \geqslant 0.$$

În acest caz, $\bar{x}'^B$ este soluția optimă a problemei modificate, deoarece așa cum s-a arătat criteriile de optimalitate sînt invariante față de variațiile vectorului d. Din formula (II.3.1) rezultă că noua soluție $\bar{x}'^B$ se calculează adunînd la soluția cunoscută $\bar{x}^B$ vectorul rezultat din înmulțirea inversei bazei cu variația δd a vectorului d.

2°. Vectorul $\bar{x}'^B$ are componente negative, adică există

$$\bar{x}'_s = \bar{x}_s + \beta_s (\delta d) < 0 \qquad \text{pentru } s \in M_1 \subset M,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde β_s este linia s din B^{-1}. În acest caz, $\bar{x}'^B$ este o soluţie dual realizabilă pentru problema modificată, iar soluţia optimă poate fi obţinută folosind algoritmul simplex-dual.

Exemplul I. Fabricarea a două produse A şi B necesită trei operaţii succesive. Primele două operaţii se efectuează în secţia I şi II ale uzinei respective, iar a treia poate fi executată în una din secţiile III, IV sau V. Fiecare produs poate fi astfel obţinut în trei moduri diferite. Coeficienţii de utilizare a maşinilor, exprimaţi în ore pe unitatea de produs, timpul disponibil al maşinilor fiecărei secţii în cursul unei luni şi beneficiul pe unitatea de produs sînt redate în următorul tabel:

(48)

Secţie de producţie	Produsul A			Produsul B			Timpul lunar disponibil, în ore pe maşină
	Timpul, în ore pe unitatea de produs						
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	
I	6	6	6	4	4	4	1440
II	5	5	5	2	2	2	1080
III	8	—	—	3	—	—	600
IV	—	7	—	—	3	—	210
V	—	—	8	—	—	4	840
Beneficiu în lei, pe unitatea de produs	120	105	95	65	45	50	

Se cere planificarea producţiei în aşa fel încît beneficiul lunar realizat să fie maxim, presupunînd că planul nu impune nici o sarcină relativă la cantitatea de produse din fiecare tip şi că materia primă necesară poate fi procurată pentru orice cantitate de produse. Restricţiile problemei, în acest caz, se referă numai la timpul disponibil al maşinilor folosite în producţie. Deoarece fiecare produs poate fi obţinut în trei moduri diferite, problema conţine trei necunoscute x_1, x_2 şi x_3, care reprezintă produse de tipul A obţinute respectiv în secţiile I, II, III; I, II, IV sau I, II, V şi trei necunoscute x_4, x_5

Scanned with OKEN Scanner

și x_6 care reprezintă produse de tipul B obținute în aceleași secții. Cu aceste notații, modelul problemei este:

$$\begin{aligned}
&6x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 \leqslant 1440,\\
&5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 \leqslant 1080,\\
&8x_1 \qquad\qquad + 3x_4 \qquad\qquad \leqslant 600, \qquad \text{(II.3.2)}\\
&\quad + 7x_2 \qquad\qquad + 3x_5 \qquad \leqslant 210,\\
&\qquad\quad 8x_3 \qquad\qquad + 4x_6 \leqslant 840;\\
&\max z = 120x_1 + 105x_2 + 95x_3 + 65x_4 + 45x_5 + 50x_6.
\end{aligned}$$

Toate inecuațiile sistemului de restricții fiind cu semnul $\leqslant$, variabilele de abatere $x_7, \ldots, x_{11}$ folosite pentru transformarea acestor inecuații în ecuații au coeficienți nuli în funcția obiectiv. Dacă se folosește metoda simplex revizuită, tabelul inițial al modelului (II.3.2) este:

Tabelul iterației 0. Exemplul I

(49)

Variabile din bază	Variabile de structură						Variabile de abatere						Const
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	z	d
x_7	6	6	6	4	4	4	1						1440
x_8	5	5	5	2	2	2		1					1080
$\leftarrow x_9$	8*	0	0	3	0	0			1				600
x_{10}	0	7	0	0	3	0				1			210
x_{11}	0	0	8	0	0	4					1		840
Ecuația Z	−120	−105	−95	−65	−45	−50						1	0

Soluția inițială nu este optimă. Pentru îmbunătățirea soluției, x_1 intră în bază deoarece această variabilă corespunde factorului relativ

Scanned with OKEN Scanner

de cost, maxim în valoare absolută; x_1 înlocuiește în bază pe x_9. Iterațiile necesare determinării soluției optime sînt:

Iterația 1 **(50)**

Variabile din bază	Inversa bazei					Constante	
	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	d	$x_s = x_2$
x_7	1		−3/4			990	6
x_8		1	−5/8			705	5
x_1			1/8			75	0
$\leftarrow x_{10}$			0	1		210	7*
x_{11}			0		1	840	0
Ecuația z			15			9000	−105

Iterația 2 **(51)**

$x_s = x_3$

x_7	1	−3/4	−6/7		810	6
x_8		1 −5/8	−5/7		555	5
x_1		1/8	0		75	0
x_2		0	1/7		30	0
$\leftarrow x_{11}$		0	0	1	840	8*
z		15	15		12 150	−95

Iterația 3 **(52)**

$x_s = x_4$

x_7	1	−3/4	−6/7	−3/4	180	7/4*
x_8		1 −5/8	−5/7	−5/8	30	1/8
x_1		1/8	0	0	75	3/8
x_2		0	1/7	0	30	0
x_3		0	0	1/8	105	0
z		15	15	95/8	22 125	−20

Scanned with OKEN Scanner

Iteraţia 4

(53)

x_4	4/7		−3/7	−24/49	−3/7	720/7
x_8	−1/14	1	−4/7	−32/49	−4/7	120/7
x_1	−3/14		2/7	9/49	9/56	255/7
x_2	0		0	1/7	0	30
x_3	0		0	0	1/8	105
z	80/7	0	45/7	255/49	185/56	24 182,14

Pentru construirea fiecărei iteraţii s-au înregistrat factorii relativi de cost în următorul tabel:

Tabelul factorilor de cost

(54)

Iteraţia	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	−120*	−105	−95	−65	−45	−50
1	0	−105*	−95	−20	−45	−50
2	0	0	−95*	−20	0	−50
3	0	0	0	−20*	0	−5/2
4	0	0	0	0	800/49	125/14

Soluţia optimă se obţine în iteraţia 4 şi este: $x_1 = 36\frac{3}{7}$; $x_2 = 30$; $x_3 = 105$; $x_4 = 102\frac{6}{7}$; $x_5 = x_6 = 0$. Planul optim arată că trebuie fabricate $171\frac{3}{7}$ produse de tip A şi $102\frac{6}{7}$ produse de tip B pentru realizarea unui beneficiu de 24 182,14 lei. Valorile variabilelor x_1 şi x_4 sînt fracţionare, astfel că soluţia găsită este aplicabilă numai pentru produse care pot fi fracţionate. Dacă A şi B sînt, de exemplu, piese necesare unui utilaj, soluţia nu este aplicabilă şi rezolvarea problemei necesită folosirea algoritmului de determinare a soluţiilor în numere întregi[66]. Producţia se va organiza astfel: $36\frac{3}{7}$ unităţi din A se vor produce în secţiile I, II şi III; 30 unităţi

Scanned with OKEN Scanner

în secţiile I, II şi IV şi 105 unităţi în secţiile I, II şi V ; B se va produce în întregime în secţiile I, II şi III.

Variabilele de abatere intră cu valori nule în soluţia optimă, cu excepţia variabilei x_8 care transformă inecuaţia 2 a sistemului în ecuaţie. Interpretarea acestui rezultat este următoarea: utilajele secţiilor sînt folosite cu întreaga lor capacitate de producţie, cu excepţia celor din secţia II care rămîn neutilizate $17\frac{1}{7}$ ore din totalul de 1 080 ore disponibile. Din punct de vedere practic astfel de rezultate atrag atenţia asupra supradimensionării unei secţii şi dau posibilitatea de a cunoaşte cu cît se micşorează beneficiul maxim dacă anumite interese impun utilizarea integrală a capacităţii de producţie a secţiilor supradimensionate. Din punct de vedere matematic, calculul micşorării beneficiului înseamnă determinarea unei soluţii suboptime, prin excluderea variabilelor de abatere din bază.

Să admitem că în luna următoare, din cauza reparaţiilor planificate în secţia I, disponibilul de ore al acestei secţii scade cu 80 ore. Vectorul constantelor în noile condiţii este:

$$d' = [1360\,;\ 1080\,;\ 600\,;\ 210\,;\ 840].$$

Care este noul plan optim de producţie? Se foloseşte formula (II.2.5), în care $\delta d = [-80,\ 0\,;\ 0\,;\ 0\,;\ 0]$ şi se citeşte B^{-1} din tabelul iteraţiei 4 şi avem:

$$\bar{x}_4' = \bar{x}_4 + B^{-1}(\delta d) = 720/7 - 320/7 = 400/7,$$
$$\bar{x}_8' = \bar{x}_8 + B^{-1}(\delta d) = 120/7 + 40/7 = 160/7,$$
$$\bar{x}_1' = \bar{x}_1 + B^{-1}(\delta d) = 255/7 + 120/7 = 375/7,$$
$$\bar{x}_2' = \bar{x}_2 + B^{-1}(\delta d) = 30,$$
$$\bar{x}_3' = \bar{x}_3 + B^{-1}(\delta d) = 105.$$

Toate componentele vectorului $\bar{x}'$ sînt pozitive, deci baza iteraţiei 4 rămîne optimă şi în noile condiţii. Comparînd soluţiile obţinute în cele două luni se constată mărirea cantităţii de produse de tip A de la $171\frac{3}{7}$ unităţi la $188\frac{4}{7}$ unităţi şi micşorarea cantităţii de produse de tip B de la $102\frac{6}{7}$ unităţi la $57\frac{1}{7}$. Beneficiul se reduce la 22 375 lei, deci scade cu 914,30 lei.

Să presupunem acum că prin scoaterea unui număr de maşini din secţia II se reduce capacitatea de producţie a acesteia cu 300 ore. Pe de altă parte se dotează secţiile III şi IV cu noi utilaje, astfel încît

Scanned with OKEN Scanner

în aceste secţii apare un plus de 200 şi respectiv 350 ore. Soluţia asociată bazei din iteraţia 4 se recalculează pentru vectorul

$$d'' = [1440\,;\ 780\,;\ 810\,;\ 560\,;\ 840]\,;\quad \delta d = [0,\ -300\,;\ 210\,;\ 350\,;\ 0].$$

Avem

$$\bar{x}''_4 = -\,1110/7\,;\ \bar{x}''_8 = -\,4420/7\,;\ \bar{x}''_1 = 1125/7\,;\ \bar{x}''_2 = 80\,;$$
$$\bar{x}''_3 = 105,$$

care constituie o soluţie dual-realizabilă deoarece are două componente negative, iar condiţiile de nenegativitate a diferenţelor $z_j - c_j$ pentru vectorii care nu aparţin bazei rămîn îndeplinite. Reoptimizarea soluţiei se face aplicînd algoritmul simplex dual. Variabila $\bar{x}''_4$ avînd cea mai mică valoare negativă va fi înlocuită în bază. Pentru determinarea variabilei care o înlocuieşte trebuie calculate elementele liniei x_4. Se ştie că elementele acestei linii se determină făcînd produsele scalare ale vectorului linie $\beta_1 = (4/7\,;\ 0\,;\ -3/7\,;\ -24/49\,;\ -3/7)$ cu vectorii matricei sistemului de restricţii. Se găsesc valorile

$$4/7\,;\ 0\,;\ -\,3/4\,;\ -\,24/49\,;\ -\,3/7\,;\ 0\,;\ 0\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 40/49\,;\ 4/7.$$

Făcînd rapoartele între elementele negative ale acestei linii şi coeficienţii ecuaţiei z se găseşte că raportul minim în valoare absolută corespunde variabilei x_{11}. Iteraţiile necesare optimizării soluţiei sînt:

Iteraţia 0

(55)

Variabile din bază	Inversa bazei					Constante d	$x_s = x_{11}$
	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}		
$\leftarrow x_4$	4/7		−3/7	−24/9	−3/7	−1110/7	−3/7
x_8	−1/14	1	−4/7	−32/49	−4/7	−4420/7	−4/7
x_1	−3/14		2/7	9/49	9/56	1125/7	9/56
x_2	0		0	1/7	0	80	0
x_3	0		0	0	1/8	105	1/8
z	80/7	0	45/7	225/49	185/56		185/55

Scanned with OKEN Scanner

Iteraţia 1

(56)

$x_s = x_4$

x_{11}	−4/3		1	8/7	1	370	−7/3
$\leftarrow x_8$	−5/6	1	0	0		−420	−4/3*
x_1	0		1/8	0		405/4	3/8
x_2	0		0	1/7		80	3/8
x_3	1/6		−1/8	−1/7		235/4	7/24
z	95/6	0	25/8	10/49			185/24

În iteraţia 1, x_8 are valoare negativă; pentru determinarea elementului de soluţie se calculează linia a doua a matricei coeficienţilor făcînd produsele scalare ale vectorului β_2 (−5/6; 1; 0; 0; 0) cu vectorii coloană ai matricei iniţiale. Astfel găsim elementele −5/6; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; −4/3; −4/3. Raportul minim căutat corespunde variabilei x_4. Soluţia optimă se găseşte în iteraţia 3.

Iteraţia 2

(57)

$x_s = x_{10}$

x_{11}	1/8	−7/4	1	8/7	1	1105	8/7
x_4	5/8	−3/4	0	0		315	0
x_1	−15/64	9/32	1/8	0		195/16	0
x_2	0	0	0	1/7		80	1/7
$\leftarrow x_3$	−1/64	−7/32	−1/8	−1/7		−265/8	−1/7*
z	705/64	185/32	25/8	10/49	0		10/49

Iteraţia 3

(58)

x_{11}	0	−7/2	0	1		840
x_4	5/8	−3/4	0			315
x_1	−15/64	9/32	1/8			195/16
x_2	−1/64	−7/32	−1/8			375/8
x_{10}	7/64	49/32	7/8	1		1855/8
z	4925/448	175/32	165/56	0	0	26859,38

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul factorilor relativi de cost (59)

iteraţie	Variabile					
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	0	0	0	0	800/49	125/14
1	0	0	0	185/24*	475/21	40/3
2	0	0	0	0	835/56	45/8
3	0	0	10/7	0	5815/392	325/56

În noile condiţii, soluţia optimă lasă nefolosite aproximativ 232 ore din totalul de 560 al secţiei IV şi toată capacitatea de producţie a secţiei V. Acest calcul făcut înainte de dotarea secţiei cu noi utilaje îngăduie efectuarea unui studiu al rentabilităţii investiţiei proiectate. Beneficiul realizat prin planificarea producţiei conformă soluţiei optime este de 26 859,38 lei, reprezentînd un spor de 11% faţă de beneficiul realizat în prima ipoteză, în timp ce numărul orelor de muncă creşte numai cu 6%, iar capacitatea de producţie disponibilă se măreşte de la 17 ore la 1 072 ore.

§ 4. MODIFICAREA VECTORULUI PREŢURILOR c

Această problemă poate fi considerată rezolvată de îndată ce s-a găsit posibilitatea postoptimizării soluţiei în urma schimbării survenite în vectorul d, deoarece, prin trecere în dual, vectorii c şi d se înlocuiesc reciproc. Totuşi, în practică, nefiind totdeauna comodă dualizarea unui model, este preferabil să se cunoască metoda de reoptimizare a soluţiei şi în acest caz.

Să admitem că după rezolvarea unei probleme vectorul cost c trebuie înlocuit cu $c' = c + \delta c$. Aşa cum s-a subliniat în § 2, soluţia problemei iniţiale, dată de formula (II.2.4), rămîne neschimbată, dar se modifică diferenţele $z_j - c_j$. Recalculînd aceste diferenţe avem

$$\begin{aligned} z'_j - c'_j = c'_B B^{-1}a_j - c'_j = (c + \delta c)_B B^{-1}a_j - (c_j + \delta c_j) = \\ = (c_B B^{-1}a_j - c_j) + (\delta c)_B B^{-1}a_j - (\delta c_j) = \\ = (z_j - c_j) + (\delta c)_B B^{-1}a_j - \delta c_j. \end{aligned} \qquad \text{(II.4.1)}$$

Se pot prezenta următoarele situaţii:

1. Toate diferenţele (II.4.1) corespunzătoare vectorilor care nu aparţin bazei îşi păstrează semnul pe care l-au avut înainte de modi-

ficarea vectorului c, adică, soluția (II.2.4) fiind optimă, și noua soluție este optimă. Valoarea funcției obiectiv în problema modificată este

$$\min[\max]z' = c'_B \bar{x}^B = (c + \delta c)_B \bar{x}^B = c_B \bar{x}^B + (\delta c)_B \bar{x}^B$$

sau

$$\min[\max] z' = \min[\max]z + (\delta c)_B \bar{x}^B. \qquad \text{(II.4.2)}$$

Din (II.4.2) rezultă că funcția obiectiv ia o altă valoare numai dacă modificarea vectorului c afectează componentele corespunzătoare variabilelor din bază.

2. Cel puțin una dintre diferențele (II.4.1) corespunzătoare unui vector care nu aparține bazei este pozitivă (în problema de minim); în acest caz, soluția nu mai este optimă și se continuă iterațiile plecînd de la ultimul tabel simplex.

Acest procedeu poate fi folosit și în problemele care au același sistem de restricții, dar diferă prin obiectivul urmărit. Astfel de probleme apar adeseori în practică datorită faptului că analiza optimalității unui plan de producție este bine să fie făcută, de cele mai multe ori, din diferite puncte de vedere, urmărindu-se obiective diferite. O astfel de analiză îngăduie compararea soluțiilor și alegerea aceleia care satisface în mai mare măsură criterii care nu se pot exprima matematic. În același timp, prin compararea soluțiilor se pot cunoaște „pierderile" care sînt acceptate atunci cînd alegerea nu se oprește asupra soluției optime din punct de vedere matematic.

Exemplul I. Reluăm problema expusă în exemplu I, §3 și presupunem că pentru produsul B executat în secțiile I, II, IV beneficiul pe unitatea de produs este de 50 de lei, iar în secțiile I, II, V este de 48 de lei. Trebuie verificat dacă, în noile condiții, planul găsit în iterația 4 rămîne optim. Vectorul prețurilor este acum $c' = (120, 105, 95, 65, 50, 48)$ și poate fi scris:

$$c' = (120\,;\,105\,;\,95\,;\,65\,;\,45\,;\,50) + (0\,;\,0\,;\,0\,;\,0\,;\,5;\,-2) = c + \delta c,$$

de unde

$$\delta c = (0\,;\,0\,;\,0\,;\,0\,;\,5;\,-2).$$

Pentru a verifica dacă baza iterației 4 rămîne optimală se recalculează linia a patra din tabelul factorilor relativi de cost. Deoarece componentele vectorului c asociate variabilelor din bază (x_4, x_1, x_2, x_3, x_8) nu s-au modificat, $(\delta c)_B = 0$ iar din formula (II.4.1) rezultă

$$z'_j - c'_j = (z_j - c_j) - \delta c_j.$$

Pentru variabilele care nu sînt în bază avem

$$z'_5 - c'_5 = \frac{800}{49} - 5 > 0\,; \quad z'_6 - c'_6 = \frac{125}{4} + 2 > 0$$

Scanned with OKEN Scanner

şi toate celelalte diferenţe nemodificate. Totuşi factorii relativi de cost rămîn nenegativi, deci soluţia optimă din exemplul I, §3 rămîne optimă şi după modificările considerate.

Exemplul II. În aceeaşi problemă se înlocuieşte vectorul c cu

$$c'' = (100\,;\,80\,;\,100\,;\,60\,;\,60\,;\,50) = (120\,;\,105\,;\,95\,;\,65\,;\,45\,;\,50) + \\ + (-20\,;\,-25\,;\,5\,;\,-5\,;\,15\,;\,0),$$

deci:

$$\delta c = (-20\,;\,-25\,;\,5\,;\,-15\,;\,15\,;\,0)\,; \qquad (\delta c)_B = (-5;\,0;\,-20\,;\,-25;\,5).$$

Pentru a cerceta optimalitatea soluţiei din exemplul I, §3 se calculează

$$(\delta c)_B B^{-1} = \\ = (-5, 0, -20; -25; 5) \begin{bmatrix} 4/7 & 0 & -3/7 & -24/49 & -3/7 \\ -1/14 & 1 & -4/7 & -32/49 & -4/7 \\ -3/14 & 0 & 2/7 & 9/49 & 9/56 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/7 \\ 0 \\ -25/7 \\ -235/49 \\ -25/56 \end{bmatrix}'$$

Aplicînd acum formula (II.4.1) găsim

$$z'' - c_5'' = \frac{800}{49} + [10/7, 0, -25/7, -235/49, -25/56](4, 2, 0, 0, 4) - 15 = \\ = \frac{800 - 425 - 735}{49} = \frac{-360}{49},$$

$$z_6'' - c_6'' = \frac{125}{14} + (10/7, 0, -25/7, -235/49, -25/56)(4, 2, 0, 0, 4) - \\ - 0 = \frac{90}{7},$$

$$z_7'' - c_7'' = \frac{80}{7} + (10/7, 0, -25/7, -235/49, -25/56)(1, 0, 0, 0, 0) - \\ - 0 = \frac{90}{7},$$

$$z_9'' - c_9'' = \frac{45}{7} + (10/7, 0, -25/7, -235/49, -25/56)(0, 0, 1, 0, 0) - \\ - 0 = \frac{20}{7},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$z''_{10} - c''_{10} = \frac{235}{49} + (10/7, 0, -25/7, -235/49, -25/56)(0, 0, 0, 1, 0) - 0 = \frac{20}{49},$$

$$z''_{11} - c''_{11} = \frac{185}{56} + (10/7, 0, -25/7, -235/49, -25/56)(0, 0, 0, 0, 1) - 0 = \frac{160}{56} = \frac{40}{14} = \frac{20}{7}.$$

[*Observație*. Prin produsul $(\delta c)_B B^{-1} a_j$ se înțelege produsul scalar al vectorului $(\delta c)_B B^{-1}$ cu vectorul a_j].

Factorul relativ de cost asociat vectorului a_5 este negativ, deci soluția nu mai este optimă. Se continuă aplicarea algoritmului plecînd de la tabelul iterației 4 din exemplul I, §3. Vectorul a_5, în baza acestei iterații, are componentele (40/49 ; —12/43 ; —15/49 ; 3/7 ; 0), astfel că vectorul care se exclude din bază este acela care corespunde:

$$\min \left[\frac{720}{7} \cdot \frac{49}{7} \; ; \quad 30 \cdot \frac{7}{3} \right] = 30 \cdot \frac{7}{3},$$

adică vectorul a_2. Noua bază este formată din vectorii a_4, a_8, a_1, a_5, a_3, iar soluția asociată este $x_4 = 320/7$; $x_8 = 240/7$; $x_1 = 405/7$; $x_5 = 70$; $x_3 = 105$; condițiile de optimalitate sînt îndeplinite și funcția obiectiv ia valoarea $z = 16\,182{,}14$. Printr-o singură iterație s-a găsit soluția optimă pentru noua funcție obiectiv.

Exemplul III. Să presupunem că în problema expusă în exemplul I, § 3 se cere planificarea producției cu scopul de a obține un număr maxim de produse, cu condiția ca secțiile IV și V să lucreze cu toată capacitatea de care dispun. Condițiile tehnice de producție rămînînd aceleași, sistemul restricțiilor nu se modifică ; variabilele de abatere x_{10} și x_{11} nu pot însă intra în soluția optimă cu valori nenule, deoarece restricțiile a patra și a cincea din (II.3.2) devin ecuații în noua problemă.

Scopul planificării fiind diferit de cel propus inițial se impune înlocuirea funcției obiectiv z din modelul (II.3.2), prin

$$\max \xi = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6.$$

Soluția optimă a exemplului I, §3 se folosește ca soluție inițială în rezolvarea noii probleme, dacă se recalculează factorii relativi de cost, elementele liniei z din iterația 4 și linia a 4-a din tabelul acestor factori. În cazul în care se modifică toate componentele vectorului

Scanned with OKEN Scanner

c calculul se face mai uşor cu formula $z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j$ decît cu formula (II.4.1). Astfel vom avea:

Iteraţia 0 (60)

Variabile din bază	Inversa bazei					Constante	$x_s = x_6$
	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}		
x_4	4/7		−3/7	−24/49	−3/7	720/7	4/7*
x_6	−1/14	1	−4/7	−32/49	−4/7	120/7	−4/7
x_1	−3/14		2/7	9/49	9/56	255/7	−3/14
x_2	0		0	1/7	0	30	0
x_3	0		0	0	1/8	105	1/2
ξ	5/14	0	−1/7	−8/49	−1/7	274 2/7	−1/7

Iteraţia 1 (61)

							$x_s = x_9$
x_6	1		−3/4	−6/7	−3/4	180	−3/4
x_8	1/2	1	−1	−8/7	−1	120	−1
x_1	0		1/8	0	0	75	1/8
x_2	0		0	1/7	0	30	0
x_3	−1/2		3/8	3/7	1/2	15	3/8*
ξ	1/2	0	−1/4	−2/7	−1/4	300	−1/4

Iteraţia 2 (62)

							$x_s = x_4$
x_6	0			0	1/4	210	0
x_8	−5/6	1		0	1/3	160	−4/3
x_1	1/6			−1/7	−1/6	70	2/3*
x_2	0			1/7	0	30	0
x_9	−4/3		1	8/7	4/3	40	−7/3
ξ	1/6	0	0	0	1/12	310	−1/3

Scanned with OKEN Scanner

Iteraţia 3

(63)

x_6	0			0	1/4	210
x_8	−1/2	1		−2/7	0	300
x_4	1/4			−3/14	−1/4	105
x_2	0			1/7	0	30
x_9	−5/12		1	9/14	3/4	285
	1/4	0	0	−1/14	0	345

Tabelul factorilor relativi de cost pentru exemplul III:

(64)

Iteraţia	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	0	0	0	0	−3/49	−1/7*
1	0	0	0	1/4	1/7	0
2	0	0	2/3*	−1/3	−1/3	0
3	1/2	0	1/2	0	0	0

Baza formată din vectorii (a_4, a_8, a_1, a_2, a_3) nu este optimă; introducînd a_6 în bază în locul vectorului a_4, valoarea funcţiei obiectiv creşte de la $274\frac{2}{7}$ la 300. Însă nici această bază nu satisface criteriile de optimalitate şi după alte două iteraţii se găseşte soluţia $x_1 = 0$; $x_2 = 30$; $x_3 = 0$; $x_4 = 105$; $x_5 = 0$; $x_6 = 210$ pentru care funcţia obiectiv ia valoarea $\xi = 345$. Această soluţie este optimă, fiindcă singurul factor relativ de cost negativ corespunde vectorului a_{10} care nu poate intra în bază. Rezultatele găsite prin rezolvarea modelului arată că numărul maxim de produse care se pot obţine în condiţiile tehnologice date, în aşa fel ca secţiile IV şi V să fie integral folosite, este de 345 produse, dintre care 30 de produse A şi 315 produse B; în secţia II rămîn nefolosite 300 de ore din 1 080 disponibile, iar în

Scanned with OKEN Scanner

secţia III, 285 ore din 600. Compararea rezultatelor din exemplele I, § 3 şi III, § 4 o realizăm cu ajutorul următorului tabel :

(65)

Exemplul	Produse			Ore nefolosite					Beneficii
	A	B	Total	I	II	III	IV	V	
I, § 3	171 3/7	102 6/7	274 2/7	—	17 1/7	—	—	—	24 182, 14
III, § 4	30	315	345	—	300	285	—	—	20 475, —

Conducerea întreprinderii poate analiza dacă diferenţa de 3 707,14 lei la beneficiu nu poate fi compensată prin folosirea orelor rămase disponibile în secţiile II şi III.

§ 5. MODIFICAREA UNUI VECTOR-COLOANĂ AL MATRICEI TEHNOLOGICE

Considerăm problema standard de programare liniară formulată în (II.2.1), pentru care se cunoaşte soluţia optimă $\bar{x}_B$ asociată bazei B. Să admitem că, după rezolvarea problemei, se impune modificarea vectorului-coloană a_r din matricea A. Vectorul modificat poate aparţine sau nu bazei optimale. Vom analiza fiecare caz în parte.

1. *Vectorul a_r nu aparţine bazei B.* În această ipoteză, verificarea optimalităţii soluţiei $\bar{x}_B$ în noile condiţii se reduce la recalcularea diferenţei $z_r - c_r$. Dacă notăm cu a_r^* vectorul modificat putem scrie

$$a_r^* = a_r + \delta a_r \qquad \text{(II.5.1)}$$

şi diferenţa $z_r - c_r = c_B B^{-1} a_r - c_r$ devine

$$z_r^* - c_r = c_B B^{-1} a_r^* - c_r = c_B B^{-1}(a_r + \delta a_r) - c_r = z_r - c_r + c_B B^{-1}(\delta a_r) ;$$

— dacă $z_r^* - c_r \leqslant 0$ (pentru probleme de minim), soluţia $\bar{x}_B$ rămîne optimă ;

— dacă $z_r^* - c_r > 0$, se continuă aplicarea algoritmului.

2. *Vectorul a_r aparţine bazei B.* Componentele vectorului a_r^* în baza B sînt

$$g_{ir}^* = \beta_i a_r^* , \qquad \text{(II.5.2)}$$

unde β_i este linia i din B^{-1}.

Scanned with OKEN Scanner

Se știe că vectorul a_r^* poate înlocui în bază pe a_r numai în situația în care componenta vectorului a_r^* corespunzătoare lui a_r este diferită de zero, adică

$$g_{r,r}^* = \beta_r a_r^* \neq 0.$$

Dacă această condiție este îndeplinită, inversa bazei B^*, formată înlocuind în B pe a_r prin a_r^*, se calculează așa cum s-a arătat în cap. I, § 3, punctul 7. Dispunînd de inversa bazei se poate reface cu ușurință calculul soluției $\bar{x}^{B^*}$ asociată acestei baze și testul de optimalitate. Se pot prezenta următoarele cazuri:

a) Vectorul $\bar{x}^{B^*}$ are toate componentele nenegative și criteriile de optim sînt îndeplinite. Soluția optimă a problemei modificate este, în acest caz, $\bar{x}^{B^*}$.

b) Vectorul $\bar{x}^{B^*}$ este nenegativ, dar nu sînt îndeplinite criteriile de optim pentru toți vectorii care nu aparțin bazei. În acest caz se continuă aplicarea algoritmului.

c) Vectorul $\bar{x}^{B^*}$ are componente negative, dar criteriile de optim sînt verificate. În aceste condiții dispunem de o soluție dual-realizabilă și reoptimizarea se poate face folosind algoritmul dual simplex.

d) Vectorul $\bar{x}^{B^*}$ are componente negative și nu sînt verificate toate condițiile de optim. În aceste cazuri se poate relua problema de la iterația anterioară intrării vectorului a_r în bază sau se poate înlocui $a_r^* = a_r + \delta a_r$ atașînd variabila x_r vectorului a_r și o nouă variabilă x_r' vectorului δa_r, ceea ce duce la mărirea matricei A cu o coloană. Această posibilitate se va discuta în § 6.

Dacă a_r^* nu îndeplinește condiția necesară pentru a înlocui pe a_r în bază, problema poate fi tratată ca în cazul d).

Exemplul I. Un număr de unități productive sînt subordonate unui organ central al cărui plan de producție cuprinde o gamă de repere, de exemplu segmenți, cămăși de cilindru, bolțuri, buloane, supape, ghiduri de supapă etc.* Planul de producție prevede pentru fiecare reper cantitatea ce trebuie realizată. Organul central trebuie să distribuie sarcinile de plan între unitățile subordonate, în funcție de capacitatea lor de producție. Pentru aceasta, mulțimea reperelor

* Datele din acest exemplu sînt preluate din art. tov. V. B o r c h, *„Aplicarea programării liniare în planificarea producției"*, publicat în revista „Metalurgia și construcția de mașini", nr. 3 din 1963.

Scanned with OKEN Scanner

se împarte în submulţimi ţinînd seama de procesul tehnologic pe grupe de maşini. Se notează cu S_1 reperele care se prelucrează numai la strung, cu S_2 cele prelucrate la strunguri, freze şi raboteze şi cu S_4 cele prelucrate la strunguri, freze, raboteze şi maşini de rectificat plan. După efectuarea acestor grupări se poate alcătui tabelul următor:

(66)

Denumirea grupei de maşini	Capacitatea, în ore/maşină	ore/maşină necesare pentru reperul			
		S_1	S_2	S_3	S_4
Strunguri	12 000	2	3	1	1
Freze	8 000	—	1	2	1
Raboteze	6 000	—	—	1	2
Maşini de rectificat plan	3 000	—	—	—	1
Maşini de rectificat cilindric	2 000	—	1	—	—
Total	31 000	2	5	4	5

Se stabileşte apoi planul optim de repartizare a sarcinilor de producţie între unităţile dependente de organul central, folosind programarea liniară. Se notează cu x_i cantitatea din reperul S_i care trebuie programată. Obiectivul problemei este utilizarea maximă a capacităţii de producţie a utilajului. Modelul problemei este

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 12\,000, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &\leqslant 8\,000, \\ x_3 + 2x_4 &\leqslant 6\,000, \\ x_4 &\leqslant 3\,000, \\ x_2 &\leqslant 2\,000, \\ x_i \geqslant 0 \quad i &= 1, \ldots, 4; \end{aligned} \tag{II.5.3}$$

$$\max z = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4. \tag{II.5.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţia optimă se obţine după şase iteraţii, prin aplicarea algoritmului simplex primal. Redăm tabelul ultimei iteraţii:

(67)

c_B ↓	$c_j \longrightarrow$		0	0	0	0	0	2	5	4	5
	Baza	d	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_1	a_2	a_3	a_4
2	a_1	1 000	1/2	−1/6	−1/6		−4/3	1			
0	a_8	1 000	0	1/3	−2/3	1	−1/3				
4	a_3	2 000	0	2/3	−1/3		−2/3			1	
5	a_4	2 000	0	−1/3	2/3		1/3				1
5	a_2	2 000	0	0	0		1		1		
$z_j - c_j$		30 000	1	2/3	5/3	0	4/3	0	0	0	0

După rezolvarea problemei se înlocuieşte materia primă din care se fabrică reperul S_4, astfel că se schimbă coeficienţii tehnologici pentru aceste produse. În modelul (II.5.3) se va înlocui vectorul a_4. Să presupunem că $a_4^* = (1\,;\ 0{,}8\,;\ 1{,}8\,;\ 1\,;\ 0)$.

Vectorul a_4 aparţine bazei, prin urmare, pentru a stabili dacă

$$B^* = (a_1,\ a_8,\ a_3,\ a_4^*,\ a_2)$$

constituie o bază, se calculează componenta g_{44}^* a vectorului a_4^* în baza $B = (a_1\ a_8\ a_3\ a_4\ a_2)$, făcînd produsul scalar dintre vectorul-linie β_4 şi a_4^*. Găsim:

$$g_{4,4}^* = (0\,;\ -1/3\,;\ 2/3\,;\ 0\,;\ 1/3)\cdot[1;\ 0{,}8;\ 1{,}8;\ 1;\ 0] = \frac{2{,}8}{3} = 14/15 \neq 0,$$

deci B* este o bază. Pentru calculul inversei, avem (v. cap. I, § 3, punctul 7)

$$g_4^* = B^{-1}a_4^* = [1/15\,;\ 1/15\,;\ -1/15\,;\ 14/15\,;\ 0],$$

$$G_4^{**} = [-1/14\,;\ -1/14\,;\ 1/14\,;\ 1\,;\ 0],$$

$$E_{5*}^{(4)} = (e_1,\ e_2,\ e_3,\ G_4^*,\ e_5),$$

Scanned with OKEN Scanner

$$(B^*)^{-1} = E_{5^*}^{(4)} A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/21 & -3/14 & & -9/14 \\ 0 & 5/14 & -5/7 & 1 & -5/14 \\ 0 & 9/14 & -2/7 & & -9/14 \\ 0 & 5/14 & 5/7 & & 5/14 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Soluţia corespunzătoare noii baze este

$$\bar{x}^{B^*} = (B^*)^{-1} d = [50\,000/21 ; 6\,000/7 ; 15\,000/7 ; 15\,000/7 ; 2\,000],$$

$\bar{x}^{B^*}$ fiind o soluţie realizabilă. Pentru testul de optimalitate calculăm pe z_j^* cu ajutorul formulei

$$z_j^* = c_{B^*} (B^*)^{-1} a_j.$$

În acest exemplu observăm că modificarea unui vector-coloană implică şi modificarea componentei corespunzătoare a vectorului c, construit prin totalizarea coeficienţilor de utilizare a maşinilor pentru fiecare reper. În problema modificată avem $c^*(2 ; 5 ; 4 ; 4{,}6 ; 5)$ şi c_{B^*} $(2 ; 0 ; 4 ; 4{,}6 ; 5)$. Factorii relativi de cost, pentru variabilele care nu aparţin bazei B^*, sînt

$$z_5^* - c_5^* = 1 ; \quad z_6^* - c_6^* = 45/42 ; \quad z_7^* - c_7^* = 12/7 ; \quad z_9^* - c_9^* = 39/14,$$

ceea ce arată că $\bar{x}^{B^*}$ este soluţia optimă în noile condiţii de producţie.

§ 6. ADĂUGAREA UNOR VECTORI-COLOANĂ ÎN MATRICEA TEHNOLOGICĂ

În unele cazuri, după rezolvarea unei probleme de programare liniară apare nevoia de a se extinde studiul şi asupra unor produse care nu au fost luate în considerare la alcătuirea modelului. Din punct de vedere matematic aceasta înseamnă că modelul se măreşte prin includerea unor noi variabile. Reoptimizarea constă în adaptarea soluţiei optime a problemei iniţiale pentru problema mărită. În acest scop se va verifica dacă noii vectori satisfac criteriul de optimalitate. Vor trebui calculate:

— expresiile vectorilor $a_l \in N_*$ (N_* fiind mulţimea indicilor vectorilor introduşi după rezolvarea modelului) în baza optimă B;

— valorile diferenţelor $z_l - c_l$; $l \in N_*$.

Scanned with OKEN Scanner

Se pot prezenta următoarele situații:

1. Criteriile de optimalitate sînt verificate pentru toți vectorii a_l de indice $l \in N_*$ și în acest caz soluția optimă a problemei inițiale rămîne optimă și pentru problema mărită.

2. Există cel puțin un vector a_l de indice $l \in N_*$ care nu verifică criteriul de optimalitate și în acest caz se continuă aplicarea algoritmului.

Exemplul I. Reluăm exemplul 5 presupunînd că planul de producție mai include un nou reper S_5 care se execută la freze și mașini de rectificat plan și cilindric, cu coeficienții de utilizare (0, 2, 0, 1, 1). Modelul (II. 5.3) se înlocuiește cu:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 12\,000,\\
x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_{10} &\leqslant 8\,000,\\
x_3 + 2x_4 &\leqslant 6\,000,\\
x_4 + x_{10} &\leqslant 3\,000,\\
x_2 + x_{10} &\leqslant 2\,000,\\
x_i \geqslant 0 \qquad i = 1, \ldots, 4, 10; &\qquad \text{(II.6.1)}\\
\max z = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_{10}. &\qquad \text{(II.6.2)}
\end{aligned}$$

În formularea problemei s-a notat cu x_{10} cantitatea de produse din reperul S_5, pentru a se putea utiliza soluția modelului (II.5.3) fără a renumerota variabilele. Se calculează componentele vectorului a_{10} în baza optimă a exemplului I § 5:

$$g_{10} = B^{-1} a_{10} = [-5/3;\ 4/3;\ 2/3;\ -1/3;\ 1]$$

și

$$z_{10} - c_{10} = c_B g_{10} - c_{10} = -4/3 < 0.$$

Deoarece $z_{10} - c_{10} < 0$, soluția nu mai este optimă pentru noua problemă și se poate îmbunătăți dacă vectorul a_{10} intră în bază. Aplicînd criteriul simplex pentru determinarea vectorului care iese din bază găsim că a_{10} înlocuiește pe a_8. Soluția asociată bazei (a_1, a_{10}, a_3, a_4, a_2) este

$$x_1 = 2250;\ x_{10} = 750;\ x_3 = 1500;\ x_4 = 2250;\ x_2 = 1250 \qquad \text{(II.6.3)}$$

și valoarea funcției obiectiv este $z = 31\,000$; factorii relativi de cost sînt nenegativi pentru toate variabilele care nu aparțin bazei, deci soluția (II.6.3) este optimă. O singură iterație a fost suficientă pentru rezolvarea problemei modificate.

Scanned with OKEN Scanner

E uşor de văzut că postoptimizarea unei probleme în care se adaugă mai multe variabile noi nu comportă nici o complicaţie.

§ 7. MODIFICAREA UNUI VECTOR-LINEI AL MATRICEI TEHNOLOGICE

Această modificare este tratată teoretic, o dată cu modificarea unui vector-coloană al matricei tehnologice, deoarece transformarea unui model în dualul său înlocuieşte matricea tehnologică prin transpusa ei, deci schimbă coloanele în linii. Din punct de vedere practic este însă mai comod să fie soluţionată problema şi pentru acest caz. Astfel de modificări apar, de exemplu, atunci cînd o inovaţie schimbă coeficienţii de utilizare a unei maşini-unelte sau cînd datorită uzurii nu se mai asigură, după un timp, aceeaşi productivitate. Să admitem că ultimele r linii ale matricei tehnologice A se modifică după rezolvarea problemei. Ipoteza relativă la poziţia liniilor modificate nu micşorează generalitatea problemei, căci restricţiile pot fi renumerotate astfel încît cele modificate să ocupe locul indicat. Notăm cu $M_1 \subset M$ mulţimea liniilor modificate din matricea A şi cu $N_1 \subset N$ mulţimea variabilelor ai căror coeficienţi au fost schimbaţi. Se pot prezenta următoarele situaţii:

1. Dacă $N_1 \in J$, J fiind mulţimea variabilelor care nu aparţin bazei, problema se reduce la cazul discutat în § 5, punctul 1.

2. Dacă modificările privesc şi componentele vectorului d din aceleaşi restricţii se vor combina procedeele de reoptimizare din § 5 cu cele stabilite în § 2.

3. Să presupunem acum că restricţiile modificate sînt inecuaţii cu semnul $\leqslant$, ale căror variabile de abatere aparţin bazei optime a problemei iniţiale.

Această bază poate fi partiţionată astfel:

$$B = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline B_2 & E \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \text{Linii} \\ \uparrow \\ m - m_1 \\ \downarrow \\ \uparrow \\ m_1 \\ \downarrow \end{array} \qquad \text{(II.7.1)}$$

$$\text{Coloane} \quad \underset{m - m_1}{\longleftrightarrow} \quad \underset{m_1}{\longleftrightarrow}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

— B_1 este matricea formată din coeficienţii variabilelor de structură care aparţin bazei, în restricţiile nemodificate;

— B_2 este formată din coeficienţii aceloraşi variabile în restricţiile modificate;

— E matricea unitate asociată variabilelor de abatere ale restricţiilor modificate, variabile care prin ipoteză aparţin bazei optime.

Să arătăm că dacă B_1 admite inversă şi B admite inversă.

Fie

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline P & Q \end{array}\right]. \qquad \text{(II.7.2)}$$

Matricele M, N, P, Q se calculează scriind

$$B \cdot B^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} E^{(m-m_1)} & 0 \\ \hline 0 & E^{(m)} \end{array}\right]. \qquad \text{(II.7.3)}$$

Înlocuind în (II.7.3) pe B şi B^{-1} cu valorile lor din (II.7.1) şi (II.7.2) avem

$$B_1M = E^{(m-m_1)};\ B_1N = 0;\ B_2M + P = 0;\ B_2N + Q = E^{(m_1)},$$

de unde găsim

$$M = B_1^{-1};\ N = 0;\ P = -B_2B_1^{-1};\ Q = E^{(m_1)}. \qquad \text{(II.7.4)}$$

Înlocuind valorile date de (II.7.4) în (II.7.2) găsim

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} B_1^{-1} & 0 \\ \hline -B_2B_1^{-1} & E^{(m_1)} \end{array}\right], \qquad \text{(II.7.5)}$$

deci există inversa matricei B; dacă se partiţionează B în modul indicat în (II.7.1), inversa ei se calculează cu formula (II.7.5). Acest rezultat dă posibilitatea de a calcula inversa unei matrice în care se modifică un număr de linii, cu condiţia ca *vectorii unitari asociaţi liniilor modificate să aparţină matricei.*

Matricea B_1^{-1} este cunoscută din rezolvarea problemei iniţiale şi dacă B_2 nu are dimensiuni mari, calculul inversei bazei optime iniţiale pentru problema modificată nu necesită un volum mare de muncă. O dată cunoscută inversa bazei se poate recalcula soluţia $\bar{x} = B^{-1}d$.

Scanned with OKEN Scanner

Diferențele $z_j - c_j$ își păstrează valoarea deoarece $z_j = c_B g_j$ și toate componentele din g_j care se modifică sînt situate pe liniile variabilelor artificiale care au componente nule în vectorul c.

După recalcularea soluției se pot prezenta următoarele situații:

— soluția $\bar{x}^{B^*}$ este realizabilă, deci este și optimă, fiindcă criteriile de optimalitate rămîn verificate;

— $\bar{x}^{B^*}$ este o soluție dual realizabilă și atunci se folosește algoritmul simplex dual pentru reoptimizare.

Revenind asupra condițiilor de la punctul 3 observăm că precizarea referitoare la semnul inecuațiilor modificate nu este esențială. Dacă unele din aceste inecuații au semnul $\geqslant$, variabilele artificiale asociate lor trebuie să aibă semnul negativ dacă intră cu valori nenule în soluția optimă. Vectorii asociați acestor variabile de abatere sînt de forma $[0, 0, \ldots, -1, \ldots, 0]$, elementul -1 fiind situat pe linia restricției pe care o transformă în ecuație. Matricea din B situată în colțul din dreapta jos nu mai este o matrice unitate, dar are toate elementele nule cu excepția celor situate pe diagonală și care sînt ± 1. Calculul inversei matricei B modificate nu este cu mult mai dificil decît în ipoteza precedentă.

În toate cazurile în care modificările unor restricții nu se încadrează în condițiile studiate, reoptimizarea este mai dificilă. În aceste cazuri se poate folosi fie trecerea în dual, fie metode care depind de poziția și numărul coeficienților modificați.

Exemplul I. Reluăm problema din exemplul I, § 3 și presupunem că în secția II de producție unele perfecționări aduse utilajului asigură prelucrarea produsului A în 4 ore/unitate și a produsului B în 1,5 ore/unitate. Restricția a doua din sistemul (II.3.1) se înlocuiește cu

$$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 1{,}5x_4 + 1{,}5x_5 + 1{,}5x_6 \leqslant 1080,$$

celelalte restricții și funcția obiectiv rămînînd nemodificate.

Baza optimă a problemei inițiale este formată din vectorii $(a_4, a_8, a_1, a_2, a_3)$, deci variabila de abatere asociată restricției modificate intră cu valoare strict pozitivă în soluția optimă. Sîntem în condițiile stipulate la situația a treia. Rearanjînd liniile în B^{-1} avem:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 4/7 & -3/7 & -24/49 & -3/7 \\ -3/14 & 2/7 & 9/49 & 9/56 \\ 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}; \quad B_2 = (1{,}5\ ;\ 4\ ;\ 4\ ;\ 4) \qquad E = [1]$$

$$P = -B_2 B_1^{-1} = (0 \ -1/2 \ -4/7 \ -1/2),$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 4/7 & -3/7 & -24/49 & -3/7 & 0 \\ -3/14 & 2/7 & 9/49 & 9/56 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & -1/2 & -4/7 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluția asociată acestei baze se calculează cu ajutorul formulei $\bar{x} = B^{-1} \cdot d$. Singura componentă care se modifică este valoarea x_8, fiindcă singura linie prin care B^{-1} diferă de baza optimă a problemei inițiale este cea corespunzătoare acestei variabile. Făcînd produsul scalar dintre ultima linie din B^{-1} și vectorul d găsim

$$x_8 = (0, -1/2, -4/7, -1/2, 1)\,(1440;\ 600;\ 210;\ 840;\ 1\,080) = 240,$$

deci toate componentele noii soluții sînt nenegative și soluția este realizabilă.

Factorii relativi de cost rămîn neschimbați, deci soluția din exemplul I este optimă. Pentru problema modificată, deosebirea constă numai în faptul că în secția II rămîn disponibile 240 ore în loc de $17\frac{1}{7}$, cîte rămîneau nefolosite înainte de perfecționările aduse utilajului.

§ 8. ADĂUGAREA UNOR RESTRICȚII SUPLIMENTARE

În acest paragraf vom trata încă un caz în care se poate pune problema reoptimizării soluției într-o problemă de programare liniară, și anume acela în care apare necesitatea de a adăuga sistemului de restricții una sau mai multe funcții liniare de aceleași variabile.

Fie

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j + x_{n+i} = d_i; \qquad i = 1, \ldots, m,\ N = \{1, \ldots, n\}, \tag{II.8.1}$$

$$x_j \geqslant 0; \qquad j = 1, \ldots, n + m,$$

$$\max\ (\min)\ z = \sum_{j \in N} c_j x_j \tag{II.8.2}$$

o problemă de programare liniară pentru care se cunoaşte o soluţie optimă $\bar{x}(\bar{x}_s)$, $s \in I$ (I fiind mulţimea indicilor variabilelor din baza optimă). Orice tabel al unei iteraţii în metoda simplex primală nu este decît tabelul coeficienţilor sistemului de ecuaţii al problemei, rezolvat în raport cu variabilele din bază. Cunoscînd deci tabelul optim putem scrie sistemul (II.8.1) sub forma

$$x_s + \sum_{j \in J} g_{sj}\, x_j = \bar{d}_s\,; \qquad s \in I, \tag{II.8.3}$$

unde j este mulţimea indicilor variabilelor care nu aparţin bazei optime şi g_{sj} sînt componentele a_j în această bază.

Să presupunem că, după rezolvarea problemei, se adaugă sistemului (II.8.1) încă r relaţii:

$$\sum_{j \in N} \alpha_{m+p,\,j}\, x_j + x_{n+m+p} = d_{m+p} \qquad p = 1, \ldots, r \tag{II.8.4}$$

Eliminînd variabilele din bază x_s din ecuaţiile (II.8.4) se obţin r funcţii liniare de variabilele x_j care nu aparţin bazei. Termenii constanţi $\bar{d}_{m+p}$ din aceste funcţii pot fi numere pozitive, nule sau negative. Completînd vectorul $\bar{x}(\bar{x}_s)$; $s \in I$ cu componentele $\bar{x}_{n+m+p} = \bar{d}_{m+p}$; $p = 1, \ldots, r$ obţinem vectorul $\bar{\bar{x}}$, care este o soluţie de bază pentru sistemul format din ecuaţiile (II.8.1) şi (II.8.4). Vom considera următoarele cazuri:

1. Toate valorile $\bar{d}_{m+p}$; $p = 1, \ldots, r$ sînt nenegative şi toate variabilele x_{n+m+p} sînt variabile de abatere. În cazul acesta $\bar{\bar{x}}$ este o soluţie optimă pentru problema completată cu noile condiţii. În adevăr, $\bar{\bar{x}} \geqslant 0$ iar criteriile de optimalitate sînt satisfăcute deoarece diferenţele $z_j - c_j$ nu se modifică, vectorul c_B completîndu-se cu componente nule, care sînt coeficienţii variabilelor de abatere în funcţia obiectiv.

2. Toate valorile $\bar{d}_{m+p}$ sînt pozitive, dar cel puţin una dintre variabilele x_{n+m+p} este o variabilă artificială. În acest caz, soluţia $\bar{\bar{x}}$ include variabile artificiale şi se poate folosi metoda penalizării sau faza I a metodei în două faze pentru excluderea lor din bază.

3. Unele dintre valorile $\bar{d}_{m+p}$ sînt negative şi $\bar{\bar{x}}$ este o soluţie dual realizabilă. Pentru optimizarea soluţiei se foloseşte algoritmul dual simplex.

O problemă care mai rămîne de discutat este următoarea: cum se poate face eliminarea variabilelor x_s ; $s \in I$ din restricţiile adăugate, folosind numai tabelul soluţiei optime a problemei iniţiale, sau cum se poate calcula inversa bazei completate cu variabilele de abatere

Scanned with OKEN Scanner

și artificiale ale noilor restricții. Deoarece cunoașterea inversei bazei este suficientă atît pentru calculul constantelor, cît și pentru continuarea iterațiilor ne vom ocupa de rezolvarea acestei ultime chestiuni.

Fie B baza optimă a problemei (II.8.1) — (II.8.2) și $\alpha_{m+p}(\alpha_{m+p,\,s})$; $s \in I$; $p = 1, \ldots, r$ vectorii-linie formați din coeficienții variabilelor din bază în ecuațiile (II.8.4). Notăm cu

$$B = \left|\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline \alpha_{m+1} & 1\ 0\ \ldots\ 0 \\ \alpha_{m+2} & 0\ 1\ \ldots\ 0 \\ \vdots & \\ \alpha_{m+r} & 0\ 0\ \ldots\ 1 \end{array}\right| = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline B_2 & E \end{array}\right] \qquad \text{(II.8.5)}$$

matricea coeficienților variabilelor din bază pentru sistemul (II.8.1) — (II.8.4). Inversa acestei baze, așa cum s-a arătat în § 7, este

$$B^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} B_1^{-1} & 0 \\ \hline -B_2 \cdot B_1^{-1} & E \end{array}\right];$$

B_1^{-1}, fiind cunoscut, calculul inversei bazei sistemului completat necesită numai calculul produsului a două matrice.

Exemplul I. Reluăm problema din exemplul I, § 5 și presupunem că se cere ca producția reperelor S_1 și S_3 să nu depășească 2 500 de unități, iar a reperelor S_2 și S_4 să fie de cel puțin 4 200 de unități.

Noile condiții se exprimă prin adăugarea restricțiilor

$$\begin{aligned} x_1 \quad &+ x_3 \quad \leqslant 2500 \\ x_2 \quad &+ x_4 \geqslant 4200 \end{aligned} \qquad \text{(II.8.6)}$$

în sistemul (II.5.3). Se adaugă acestor inecuații variabilele x_{10} și x_{11} pentru a aduce sistemul în forma standard. Baza optimă B_1 a modelului (II.5.3) este formată din vectorii $(a_1, a_8, a_3, a_4, a_5)$. Matricea B_2 este

$$B_2 = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

B_1^{-1} fiind cunoscută din rezolvarea exemplului I, § 5 se calculează produsul — $B_2\ B_1^{-1}$ și se scrie B^{-1}. Tabelul iterației optime din acest exemplu, transformat pentru cazul studiat, este:

Tabelul inițial pentru exemplul I § 8

(68)

c_s ↓	c_j ⟶									2	5	4	5
	Baza	d	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_1	a_2	a_3	a_4
2	a_1	1 000	1/2	−1/6	−1/6		−4/3			1			
0	a_8	1 000	0	1/3	−2/3	1	−1/3						
4	a_3	2 000	0	2/3	−1/3		−2/3					1	
5	a_4	2 000	0	−1/3	2/3		1/3						1
5	a_2	2 000	0	0	0		1				1		
0←	a_{10}	−500	−1/2	−1/2	1/2		2	1					
0	a_{11}	200	0	1/3	−2/3		−4/3		1				
$z_j - c_j$		30 000	1	2/3	5/3	0	4/3	0	0	0	0	0	0

Soluția găsită este dual-realizabilă pentru cazul în care nu se ține seamă de faptul că a_{11} este asociat unei variabile artificiale. Folosind algoritmul simplex dual se stabilește că a_{10} se înlocuiește în bază prin a_6. Pentru determinarea soluției optime este necesar să se calculeze:

a) Valorile vectorului d în baza B (a_1, a_8, a_3, a_4, a_2, a_6, a_{11}), făcînd produsele scalare ale vectorului inițial d (12 000; 8 000; 6 000; 3 000; 2 000; 2 500; 4 200) cu fiecare vector linie al inversei bazei (scrisă în prima parte a tabelului inițial pentru exemplul I, § 8, astfel:

$$\overline{d}(3\,500/3;\ 2\,000/3;\ 4\,000/3;\ 7\,000/3;\ 2\,000;\ 1\,000;\ -400/3). \qquad (II.8.7)$$

Soluția (II.8.7) este dual-realizabilă, fiindcă mai conține componenta negativă $x_{11} = -400/3$, iar diferențele $z_j - c_j$, așa cum se știe, rămîn nenegative. Fiind necesară o nouă iterație se calculează:

b) Vectorul linie a_{11}. Avem

$$a_{11}(-1/3;\ 0;\ -2/3;\ 0;\ -4/3;\ 0;\ 1). \qquad (II.8.8)$$

(Acest vector are elemente negative, deci se poate continua aplicarea algoritmului dual simplex).

Scanned with OKEN Scanner

c) Valorile diferenţelor $z_j - c_j$. Acestea sînt

$$(1/3;\ 0;\ 7/3;\ 0;\ 12/3;\ 4/3;\ 0). \qquad \text{(II.8.9)}$$

d) Se alege vectorul care înlocuieşte în bază pe a_{11}, determinînd

$$\min\left[\frac{1}{3}:\frac{1}{3};\ \frac{7}{3}:\frac{2}{3};\ \frac{12}{3}:\frac{4}{3}\right]=\frac{1}{3}\cdot 3=1. \qquad \text{(II.8.10)}$$

Acest rezultat arată că a_5 înlocuieşte pe a_{11} pentru formarea noii baze $\overline{\overline{B}}(a_1,\ a_8,\ a_3,\ a_4,\ a_2,\ a_6,\ a_5)$.

e) Se calculează a_5 în baza $\overline{B}$. Avem

$$\bar{a}_5\,(2/3;\ -1/3;\ -2/3;\ 1/3;\ 0;\ 1;\ -1/3^*). \qquad \text{(II.8.11)}$$

Elementul pivot este $-1/3$. Singurele elemente care interesează sînt componentele soluţiei în baza $\overline{\overline{B}}$ şi acestea se pot calcula, fără a cunoaşte pe $(\overline{\overline{B}})^{-1}$, folosind numai vectorii $\overline{d}$; $\bar{a}_5$ şi pivotul. Efectuînd calculul găsim:

$$\overline{\overline{d}}(900;\ 800;\ 1600;\ 2200;\ 2000;\ 4200;\ 400). \qquad \text{(II.8.12)}$$

$\overline{\overline{d}}$ are toate componentele pozitive, $\overline{\overline{B}}$ nu conţine vectorul artificial a_{11} şi criteriile de optim sînt satisfăcute, deci $\overline{\overline{d}}$ este soluţia optimă: $x_1 = 900$; $x_8 = 800$; $x_3 = 1600$; $x_4 = 2200$; $x_2 = 2000$; $x_6 = 4200$; $x_5 = 400$, pentru care sînt verificate cu semnul egal restricţiile (II.8.6). Valoarea funcţiei obiectiv se calculează prin înlocuirea componentelor soluţiei în funcţia (II.5.4). Avem $\max z = 29\,200$ de piese, valoare mai mică decît a funcţiei obiectiv din exemplul I, § 5, care era 30 000 de piese. Acest rezultat era de aşteptat deoarece, cînd se foloseşte algoritmul dual simplex, funcţia obiectiv se apropie de maxim prin valori descrescătoare. Pe de altă parte, un număr sporit de restricţii conduce întotdeauna la valori mai mici ale funcţiei obiectiv în problemele de maxim şi mai mari în cele de minim. Reţinem deci că un număr sporit de condiţii impuse variabilelor nu aduce o „ameliorare" a valorii funcţiei obiectiv.

§ 9. CONSIDERAŢII FINALE

Din cele expuse în acest capitol se desprinde utilitatea cunoaşterii metodelor de reoptimizare a soluţiilor în problemele de programare liniare. Evident că cele şase cazuri de reoptimizare care au fost discu-

Scanned with OKEN Scanner

tate nu epuizează toată gama problemelor de acest tip care pot fi întîlnite în practică. De cele mai multe ori, modificarea unor elemente ale modelului impune, în același timp, modificarea altor elemente de care acestea sînt legate. Prin urmare, în practică problemele de reoptimizare nu apar încadrate numai într-unul din cazurile studiate. Considerăm că analiza tuturor combinațiilor de modificări posibile pe lîngă faptul că ar fi dificilă este în același timp și inutilă, deoarece, cunoscînd metodele de reoptimizare în cazurile de bază, combinarea acestora nu mai prezintă greutăți deosebite.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

PROGRAMAREA PARAMETRICĂ

§ 1. OBIECTUL ȘI IMPORTANȚA PRACTICĂ A PROGRAMĂRII PARAMETRICE

Caracteristic problemelor de programare liniară este faptul că mărimile care intră în construirea modelului lor matematic sînt de două categorii:

— variabilele sau necunoscutele problemei, adică mărimile care trebuie determinate pentru găsirea soluției optime;

— constantele care alcătuiesc termenii liberi din sistemul restricțiilor constituind vectorul d, coeficienții variabilelor în funcția obiectiv care formează vectorul c și elementele matricei tehnologice.

Constantele modelului trebuie determinate cu multă precizie, pentru ca rezultatele studiului întreprins prin programarea liniară să aibă valoare practică.

În cadrul unor probleme ridicate de practica economică nu toți coeficienții folosiți în alcătuirea modului matematic sînt constanți. De exemplu, coeficienții de utilizare a unui laminor sînt funcții de temperatura la care se face laminarea și de calitatea oțelului laminat. Modelul matematic al unei probleme care include folosirea laminorului va conține, în matricea tehnologică A, o coloană ale cărei elemente vor fi funcții de doi parametri care pot lua valori în anumite intervale.

În unele cazuri, cererea de produse nu este constantă, ci dependentă de anumiți parametri (mărimea populației, salariul mediu, dezvoltarea unei ramuri industriale care folosește aceste produse ca materie primă etc.). Uneori, variațiile cererii pot fi neînsemnate sau satisfacerea cererilor excedentare poate fi deplasată în timp; alteori se pot crea rezerve pentru produsele caracterizate printr-o cerere variabilă. Există însă și situații în care producția trebuie să urmărească îndeaproape o cerere care se dezvoltă după un plan prevăzut și, în acest caz, în problema alegerii unui plan optim de producție vectorul cererii nu este constant, ci se înlocuiește printr-o funcție de unul sau mai mulți parametri.

În construcții se poate determina timpul minim de execuție a unui proiect prin metoda drumului critic. Evident că timpul minim

Scanned with OKEN Scanner

se calculează pentru anumite condiţii tehnice de execuţie a diferitelor activităţi care alcătuiesc proiectul. Unele activităţi pot fi executate într-un timp mai scurt, dar aceasta implică o creştere a preţului de cost al lucrării. Firesc este să se pună întrebarea : care este eficienţa economică a reducerii timpului de execuţie a proiectului. Posibilitatea alegerii duratei celei mai eficiente din punct de vedere economic este oferită de rezolvarea unui model matematic în care funcţia obiectiv este suma funcţiilor de utilitate a activităţilor proiectului şi această funcţie depinde de un parametru : timpul total de execuţie a proiectului.

Aceste cîteva exemple scot în evidenţă necesitatea studierii problemelor tratate în literatura de specialitate sub numele de „programare parametrică".

Caracteristic programării parametrice este faptul că unii dintre coeficienţii modelului matematic şi, în cazul cel mai general, toţi coeficienţii sînt funcţii liniare sau neliniare de unul sau de mai mulţi parametri. Rezolvarea problemelor de programare parametrică comportă :

— determinarea soluţiei optime pentru o anumită valoare a parametrului (sau un sistem de valori dacă există mai mulţi parametri) ;

— studiul sensibilităţii soluţiei optime la variaţia parametrului ; acest studiu constă în stabilirea intervalelor (sau domeniilor) de optimalitate a unei soluţii, adică a mulţimii valorilor parametrului pentru care soluţia îşi păstrează caracterul optim.

Rezolvarea problemelor de programare parametrică întîmpină mai multe dificultăţi decît aceea a modelelor liniare cu coeficienţi constanţi. În vederea unui studiu sistematic vom lua cazurile de parametrizare a vectorilor d şi c ; vector-linie şi coloană din matricea A. În fiecare caz se poate presupune că elementul considerat este funcţie liniară sau neliniară de unul sau de mai mulţi parametri. Bineînţeles, în practică se poate întîlni atît cazul general care comportă parametrizarea tuturor coeficienţilor, cît şi combinaţii ale cazurilor enunţate mai înainte.

Problema care comportă parametrizarea tuturor coeficienţilor nu a fost încă rezolvată. Singurele cazuri tratate complet în literatura pe care autorii acestei lucrări au avut posibilitatea să o consulte sînt cele în care intervine, liniar, un singur parametru în vectorii d şi c sau în elementele a_{ij} ale matricei A [34, 66, 69].

Programarea parametrică include şi studiul problemelor de transport în care parametrizarea poate privi costurile, cererile în punctele de consum sau disponibilul în depozite.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. PARAMETRIZAREA VECTORULUI „CERERE"

1. Introducere

O categorie de probleme de programare parametrică este formată de problemele în care termenii liberi din sistemul restricţiilor depind de unul sau de mai mulţi parametri. Din punct de vedere economic aceşti termeni pot reprezenta cererea de produse sau disponibilul resurselor (materii prime, forţă de muncă, capacitatea de producţie a utilajelor etc.). Se pot studia cazurile în care vectorul „cerere" este funcţie:

— liniară de un parametru;
— liniară de mai mulţi parametri;
— neliniară de un parametru;
— neliniară de mai mulţi parametri.

În cele mai multe probleme practice parametrii λ_i care intervin în componenţa vectorului cerere sînt numere reale aparţinînd unor intervale finite $[\alpha_i, \beta_i]$. Prin schimbări convenabile de origine, aceste intervale se pot transforma în $[0, \gamma_i]$. Din punct de vedere matematic prezintă interes şi studiul problemei pentru variaţia parametrilor pe întreaga mulţime a numerelor reale.

Rezolvarea problemelor în care vectorul cerere d este parametrizat constă în determinarea soluţiilor optime corespunzătoare diferitelor valori ale parametrilor de care depinde acest vector. Reamintim că soluţia unei probleme de programare liniară este optimă dacă:

— este realizabilă, adică are toate componentele nenegative;
— este dual-realizabilă, adică factorii relativi de cost asociaţi vectorilor care nu aparţin bazei sînt nenegativi pentru problemele de maxim şi nepozitivi pentru cele de minim.

Soluţia asociată unei baze B este

$$x^B = B^{-1} d,$$

deci această soluţie depinde atît de baza aleasă, cît şi de vectorul d.

Factorii relativi de cost, în baza B, sînt:

$$\bar{c}_j = z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j.$$

Deci, $\bar{c}_j$ sînt mărimi invariante în raport cu d.

Din aceste considerente rezultă că, indiferent de modul în care este parametrizat vectorul d, dacă soluţia asociată unei baze B este optimă pentru anumite valori ale parametrilor, ea poate deveni nerealizabilă pentru alte valori, dar rămîne dual-realizabilă. Această observaţie reduce studiul optimalităţii bazei asociate unei soluţii dual-realiza-

Scanned with OKEN Scanner

bile la determinarea condițiilor în care soluția dată este realizabilă. Condițiile de nenegativitate a componentelor soluției prezintă particularități legate de modul în care este parametrizat d, fapt care impune analiza fiecăruia din cazurile de parametrizare enumerate anterior.

2. Vectorul d funcție liniară de un parametru

Să considerăm problema de programare liniară în forma standard

$$\begin{aligned} Ax &= d, \\ x &\geqslant 0\,; \\ \max z &= cx, \end{aligned} \tag{III.2.1}$$

în care d este de forma

$$d = d^{(0)} + \lambda\, d^{(1)}, \tag{III.2.2}$$

$d^{(0)}$ și $d^{(1)}$ fiind vectori constanți și λ un parametru care poate lua valori pe axa reală. Putem presupune, fără a micșora generalitatea expunerii, că $d^{(0)}$ are toate componentele nenegative, deoarece, dacă acest deziderat nu este satisfăcut, restricțiile corespunzătoare componentelor negative se înmulțesc cu -1.

Presupunem că se cunoaște o soluție optimă a problemei (III.2.1) pentru o valoare particulară λ_0 a parametrului. Se observă cu ușurință că întotdeauna se poate considera $\lambda_0 = 0$. Fie B baza asociată soluției optime, I mulțimea indicilor vectorilor care aparțin bazei B și J complementara acestei mulțimi față de mulțimea N a indicilor vectorilor care formează matricea A.

Soluția problemei (III.2.1) asociată bazei B este

$$x_B(\lambda) = B^{-1} d = B^{-1}(d^{(0)} + \lambda d^{(1)}) = B^{-1} d^{(0)} + \lambda B^{-1} d^{(1)}. \tag{III.2.3}$$

Dacă notăm

$$x_B^{(0)} = B^{-1} d^{(0)} \quad \text{și} \quad x_B^{(1)} = B^{-1} d^{(1)},$$

soluția $x_B(\lambda)$ se scrie

$$x_B(\lambda) = x_B^{(0)} + \lambda\, x_B^{(1)}. \tag{III.2.4}$$

Se pune următoarea întrebare: care sînt valorile parametrului λ pentru care $x_B(\lambda)$ este o soluție optimă?

Pe baza observațiilor făcute, răspunsul la această întrebare se obține determinînd valorile parametrului pentru care $x_B(\lambda)$ este o

Scanned with OKEN Scanner

soluție realizabilă. Dacă se notează cu $x_i(\lambda)$; $x_i^{(0)}$ și $x_i^{(1)}$, $i \in I$ componentele vectorilor $x_B(\lambda)$; $x_B^{(0)}$ și $x_B^{(1)}$ condițiile de nenegativitate a componentelor vectorului $x_B(\lambda)$ sînt

$$x_i(\lambda) = x_i^{(0)} + \lambda x_i^{(1)} \geqslant 0 \text{ pentru } i \in I. \qquad \text{(III. 2.5)}$$

Valorile $x_i^{(0)}$ sînt nenegative, deoarece B este optimă pentru $\lambda=0$.

Sistemul de inecuații (III.2.5) este satisfăcut pentru $\underline{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant \overline{\lambda}$, unde

$$\underline{\lambda} = \begin{cases} \max\left[-\dfrac{x_s^{(0)}}{x_s^{(1)}}\right]; \text{ dacă } x_s^{(1)} > 0 \text{ pentru cel puțin o valoare a lui } s, \\ \\ -\infty; \text{ dacă } x_s^{(1)} < 0, \text{ pentru toate valorile lui } s; \end{cases} \qquad \text{(III.2.6)}$$

$$\overline{\lambda} = \begin{cases} \min\left[-\dfrac{x_s^{(0)}}{x_s^{(1)}}\right]; \text{ dacă } x_s^{(1)} < 0, \\ \\ +\infty; \text{ dacă } x_s^{(1)} > 0, \text{ pentru toate valorile lui } s. \end{cases} \qquad \text{(III.2.7)}$$

Așadar, în ipoteza că se cunoaște baza B, optimă pentru $\lambda = 0$, se determină un interval în care λ poate varia, astfel încît B să rămînă baza optimă.

Deoarece s-a admis că λ ia valori pe toată axa reală, întrebarea ce se pune după determinarea intervalului $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ pentru care se cunoaște o soluție optimă este: cum poate fi găsită baza optimă pentru valorile parametrului care nu aparțin intervalului determinat?

Pentru ca această întrebare să aibă sens trebuie să presupunem că cel puțin una din valorile $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ este finită. Să admitem că $\overline{\lambda}$ este finit. Cînd $\lambda = \overline{\lambda}$, se anulează:

a) componenta x_l a soluției x_B, dacă minimul dat de (III.2.7) este unic și egal cu $-\dfrac{x_l^{(0)}}{x_l^{(1)}}$, sau

b) toate componentele x_s, $s \in I_1 \subset I$, dacă minimul din (III.2.7) se obține pentru componentele x_s; $s \in I_1$ ale vectorului x_B.

Pentru $\lambda = \overline{\lambda} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ și arbitrar de mic, cel puțin o componentă a soluției $x_B(\overline{\lambda} + \varepsilon)$ devine negativă. Soluția rămîne însă dual-reali-

Scanned with OKEN Scanner

zabilă, deci schimbarea bazei se face folosind algoritmul simplex dual. Vom considera pe rînd cazurile a) și b).

Cazul a. $\text{Min}\left[-\frac{x_s^{(0)}}{x_s^{(1)}}\right]$; $x_s^{(1)} < 0$ este unic. Fie

$$\bar{\lambda} = \frac{x_l^{(0)}}{x_l^{(1)}} = \min_{s/x_s^{(1)}<0}\left[-\frac{x_s^{(0)}}{x_s^{(1)}}\right].$$

Deci, componenta x_l se anulează pentru $\lambda=\bar{\lambda}$ și devine negativă pentru $\lambda = \bar{\lambda} + \varepsilon$, $\varepsilon>0$. Pentru schimbarea bazei se cercetează semnele elementelor g_{l_j} din linia l, pentru $j \in J$. Se pot prezenta următoarele situații:

a_1) Toți $g_{l_j} \geqslant 0$, $j \in J$. În acest caz nu există soluție optimă pentru $\lambda > \bar{\lambda}$, deoarece nu se poate face schimbarea bazei.

a_2) Există $g_{l_j} < 0$ în coloanele de indici $j \in J_1 \subset J$. În acest caz se poate face schimbarea bazei și se determină vectorul care trebuie să înlocuiască pe a_l în bază prin criteriul de intrare al algoritmului simplex dual. Fie B_1 baza obținută înlocuind în B pe a_l cu a_k. Baza B_1 este optimă pentru $\lambda=\bar{\lambda}$, deci pentru această valoare a parametrului există două baze optime care diferă printr-un singur vector. Dispunînd acum de o nouă bază optimă pentru o valoare particulară a parametrului se poate determina un nou interval de variație pentru λ pe care B_1 își păstrează caracterul de optimalitate. Fie $[\bar{\lambda}, \lambda_1]$ acest interval. Vom arăta că $\lambda_1 > \bar{\lambda}$.

Dacă se dovedește această afirmație înseamnă că într-un număr finit de iterații intervalul $[\bar{\lambda}, +\infty]$ se împarte în subintervale de optimalitate corespunzătoare unor baze determinate. Valorile care limitează aceste subintervale se numesc *valori critice* ale parametrului. Un raționament analog conduce la determinarea valorilor critice pentru intervalul $(-\infty, \underline{\lambda})$.

Să determinăm intervalul pe care baza B_1, optimă pentru $\lambda = \bar{\lambda}$, rămîne optimă.

Soluția asociată bazei B_1 este

$$x_{B_1} = B_1^{-1}(d^{(0)} + \bar{\lambda} d^{(1)}) = B_1^{-1} d^{(0)} + \bar{\lambda} B_1^{-1} d^{(1)}$$

și componentele acestei soluții sînt

$$\bar{x}_i(\bar{\lambda}) = \bar{x}_i^{(0)} + \bar{\lambda}\bar{x}_i^{(1)} \geqslant 0, \text{ pentru } i \in I-\{l\}-\{k\}, \bar{x}_k(\bar{\lambda}) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\lambda = \bar{\lambda} + \varepsilon$ avem

$$\bar{x}_i\,(\bar{\lambda} + \varepsilon) = \bar{x}_i^{(0)} + \bar{\lambda}\bar{x}_i^{(1)} + \varepsilon\,\bar{x}_i^{(1)} = \bar{x}_i(\bar{\lambda}) + \varepsilon\,\bar{x}_i^{(1)}$$

pentru $i \in I - \{l\} - \{k\}$,

$$\bar{x}_k\,(\bar{\lambda}) = \frac{1}{g_{lk}}\,\bar{x}_l^{(1)}. \qquad \text{(III.2.8)}$$

Din relaţia (III.2.8) rezultă:

— dacă vectorul $\bar{x}^{(1)} = B_1^{-1}\,d^{(1)}$ are toate componentele nenegative, B_1 este optimă pentru orice $\varepsilon > 0$, deci pe intervalul $[\bar{\lambda}, +\infty)$;

— dacă $\bar{x}^{(1)}$ are componenta $x_l^{(1)} < 0$, B_1 nu este optimă pentru $\varepsilon > 0$; problema nu admite soluţii realizabile pentru valorile parametrului superioare lui $\bar{\lambda}$;

— dacă $x_l^{(1)}$ este pozitiv dar există $\bar{x}_i^{(1)} < 0$ pentru $i \in I - \{l\} - \{k\}$, condiţiile de nenegativitate a componentelor soluţiei $x_i(\bar{\lambda}+\varepsilon)$ sînt îndeplinite pentru

$$\varepsilon = \min_{i/\bar{x}_i^{(1)}<0}\left[-\frac{\bar{x}_i(\lambda)}{\bar{x}_i^{(1)}}\right]. \qquad \text{(III.2.9)}$$

Deorece $\bar{x}_i\,(\bar{\lambda}) > 0$ pentru soluţiile nedegenerate, ε este pozitiv şi B_1 este optimă pentru $\bar{\lambda} < \lambda < \lambda_1$, unde $\lambda_1 = \bar{\lambda} + \varepsilon > \bar{\lambda}$.

Folosind acelaşi procedeu se determină o succesiune de baze optime $B_1, B_2, \ldots, B_p$ corespunzătoare intervalelor limitate de valorile $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Aceste valori formează un şir crescător; ultimul termen a şirului poate fi infinit şi atunci B_p nu există. Analog se determină o succesiune de baze optime pentru $\lambda < \underline{\lambda}$. Fie $B_1', B_2', \ldots, B_q'$ aceste baze şi $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_q'$ valorile critice ale parametrului. Se dovedeşte că şirul valorilor critice λ_i'; $i = 1, \ldots, q$ este descrescător, iar ultimul termen al şirului poate fi $-\infty$.

În acest fel, axa reală se împarte în intervale cărora le corespunde cîte o bază optimă; bazele asociate intervalelor care au o extremitate comună diferă printr-un singur vector; pentru extremităţile intervalelor care sînt valorile critice ale parametrului, problema admite două baze optime, deci o infinitate de soluţii optime.

Scanned with OKEN Scanner

Cazul b. Min $-\frac{x_s^{(0)}}{x_s^{(1)}}$; $x_s^{(1)} < 0$ nu este unic determinat, adică există o submulțime de indici $s \in I_1 \subset I$ pentru care $-\frac{x_s^{(0)}}{x_s^{(1)}}$ este minim. În acest caz, toate componentele x_S, $s \in I_1$ sînt nule pentru $\lambda = \bar{\lambda}$ și devin negative cînd $\lambda = \bar{\lambda} + \varepsilon$; $\varepsilon > 0$. Pentru a găsi o nouă soluție optimă sînt necesare mai multe iterații construite prin aplicarea algoritmului simplex dual.

După un număr finit de schimbări de bază se ajunge fie la concluzia că nu există bază optimă pentru $\lambda > \bar{\lambda}$, fie la o bază optimă pentru un nou interval de variație a parametrului, dar această bază diferă de B prin mai mult de un singur vector. Toate bazele construite pentru transformarea soluției nerealizabile în soluție optimă sînt optime pentru $\lambda = \bar{\lambda}$, deci în acest caz problema admite mai mult de două baze optime pentru valoarea critică a parametrului.

3. Algoritm pentru determinarea bazelor optime

Rezolvarea problemelor de programare parametrică constă în:

— determinarea intervalelor în care problema admite aceeași bază optimă;

— determinarea bazelor optime asociate fiecărui interval.

Pentru explorarea intervalului de variație a parametrului se procedează astfel:

Etapa I. Se rezolvă problema de programare liniară rezultată din problema parametrică, dînd parametrului o valoare particulară, de exemplu $\lambda = 0$, sau una pentru care presupunem că există o soluție optimă. Dacă se obține o bază optimă se trece la etapa II. În caz contrar se caută o valoare a parametrului pentru care problema admite un optim finit, folosind procedeul care va fi expus la punctul următor al acestui paragraf.

Etapa II. Se determină intervalul de optimalitate $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ a bazei optime pentru valoarea particulară dată parametrului; $\underline{\lambda}$ și $\bar{\lambda}$ se calculează cu ajutorul formulelor (III.2.6) și (III. 2.7). Soluțiile pentru valorile extreme ale intervalului sînt degenerate avînd cel puțin o componentă nulă. Dacă $\underline{\lambda}$ sau $\bar{\lambda}$ sînt finite se trece la etapa III.

Etapa III. Se elimină din bază vectorii asociați acelor componente a soluției care se anulează pentru valorile critice. Schimbarea bazei

Scanned with OKEN Scanner

se obține prin aplicarea algoritmului simplex dual. Se pot prezenta situațiile următoare:

1. Nu se poate efectua schimbarea bazei și atunci problema nu admite un optim finit pentru valorile parametrului exterioare intervalului deja determinat, sau

2. Se găsește o bază optimă care diferă de precedenta printr-un singur vector în cazul (a) sau prin mai mulți vectori în cazul (b) și se determină intervalul de optimalitate a acestei baze.

3. Noua bază este optimă pentru toate valorile parametrului exterioare intervalului de optimalitate a bazei anterioare.

În situațiile 1 și 3 problema este complet rezolvată; în cazul 2 se continuă aplicarea algoritmului pînă cînd se ajunge la una dintre situațiile 1 sau 3.

4. Determinarea soluției inițiale

Metoda de explorare a intervalului de variație a parametrului presupune cunoașterea unei soluții optime a problemei pentru o valoare particulară a parametrului. În această secțiune se prezintă o metodă care dă posibilitatea de a găsi o astfel de soluție sau de a dovedi că problema propusă nu are soluție optimă pentru nici o valoare a parametrului. Procedeul folosit este următorul: se determină o soluție dual-realizabilă a problemei propuse (v. cap. I, § 5, punctele 2 și 3). Fie B baza corespunzătoare soluției dual-realizabile și $x_B = B^{-1} d^{(0)} + \lambda B^{-1} d^{(1)}$ soluția asociată acestei baze. Se pot prezenta următoarele situații:

a) Vectorul $B^{-1} d^{(0)}$ este nenegativ. În acest caz x_B este soluția optimă pentru $\lambda = 0$ și problema determinării unei soluții inițiale este rezolvată.

b) Sistemul obținut punînd condițiile de nenegativitate a componentelor vectorului x_B este compatibil. Dacă $\lambda = \lambda_1$ este cea mai mică valoare a parametrului λ pentru care $x_B \geqslant 0$, dispunem de soluția căutată.

c) Sistemul format din condițiile de nenegativitate a componentelor soluției este incompatibil. În acest caz se determină valoarea $\lambda = \lambda_1$ pentru care cel mai mic număr de componente ale soluției devine negativ.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru această valoare a parametrului dispunem de o bază dual-realizabilă; folosind algoritmul simplex dual, după un număr finit de iteraţii se constată unul din următoarele cazuri:

c_1) Soluţia corespunzătoare bazei B_t din iteraţia t este optimă pentru $\lambda = \lambda_1$.

c_2) După t iteraţii soluţia mai conţine componente negative, dar algoritmul simplex dual nu mai poate fi aplicat. În acest caz se calculează soluţia corespunzătoare vectorului $d^{(0)} + \lambda\, d^{(1)}$ în baza B_t şi se rezolvă sistemul de inecuaţii obţinut din condiţiile de nenegativitate a componentelor. Rezolvarea sistemului conduce la situaţia (b) sau (c).

Exemplul I. Să se determine

$$\min z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5$$

pe mulţimea soluţiilor nenegative ale sistemului

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad + 4x_5 &\geqslant 100 + 20\,\lambda, \\ x_1 \qquad + 5x_3 + x_4 + 6x_5 &\geqslant 200 - 30\,\lambda, \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 \qquad &\geqslant 200 + 50\lambda. \end{aligned}$$

Folosim metoda simplex revizuită pentru rezolvarea problemei de programare liniară care se obţine luînd $\lambda = 0$ în sistemul de restricţii. Se ştie că pentru a forma tabelul iniţial se adaugă restricţiilor variabilele artificiale x_6, x_7 şi x_8; se formează o nouă ecuaţie, adunînd toate relaţiile sistemului şi înlocuind suma variabilelor artificiale cu w; se scrie funcţia obiectiv ca o ecuaţie. Cu aceste modificări avem

Tabelul iniţial pentru $\lambda = 0$

(69)

Ecuaţia	Variabile de structură					Variabile artificiale			w	z	Constante
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8			
1	2	4	1	0	4	1					100
2	1	0	5	1	6		1				200
3	0	1	4	2	0			1			200
w	3	5	10	3	10				1		500
z	−1	−2	−3	−1	−1					1	0

Scanned with OKEN Scanner

În prima fază a aplicării algoritmului se urmărește minimizarea funcției w, deci schimbările bazei sînt determinate de factorii relativi de cost $\bar{a}_{0j}$. În iterația 3 se obține $w = 0$. Calculînd factorii relativi de cost pentru funcția z, în baza dată de iterația 3 se constată că $\bar{c}_j$ sînt negativi sau nuli, cu excepția celor asociați variabilelor x_6 și x_7. Aceste variabile fiind artificiale sînt eliminate din sistem după excluderea lor din bază, prin urmare baza găsită este optimă pentru $\lambda = 0$.

Reproducem tabelul factorilor relativi de cost și tabelul iterației 3 care dă soluția optimă.

Factorii relativi de cost

(70)

Ciclul		Variabile							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
a_{0j}	0	3	5	10*	3	10	0	0	0
	1	1	5*	0	1	−2	0	−2	0
	2	−1,25	0	0	1,25	−5,5	−1,25	−1,75	0
	3	0	0	0	0	0	−1	−1	−1
c_j	3	−0,8	0	0	0	−3,36	0,32	−0,44	0,72

Iterația 3

(71)

Variabile din bază	Inversa bazei			z	Constante
	x_6	x_7	x_8		
x_2	0,24	−0,08	0,04		16
x_3	0,04	0,32	−0,16		36
x_4	−0,2	−0,6	0,8		20
z	0,32	−0,44	0,72	1	88

În acest tabel avem soluția optimă pentru $\lambda = 0$ și anume: $x_1 = 0$; $x_2 = 16$; $x_3 = 36$; $x_4 = 20$; $x_5 = 0$. Pentru determinarea intervalului în care această soluție rămîne optimă se calculează compo-

Scanned with OKEN Scanner

nentele soluției asociate bazei B_3 pentru $\lambda \neq 0$ cu formula $x_B = B_3^{-1} d$, unde componentele vectorului d sînt

$$d_1 = 100 + 20\lambda\,;\ d_2 = 200 - 30\lambda\,;\ d_3 = 200 + 50\lambda.$$

Găsim

$$x(\lambda) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 + 9{,}2\lambda \\ 36 - 16{,}8\lambda \\ 20 + 54\lambda \end{bmatrix}.$$

Parametrul λ are și coeficienți pozitivi și negativi în $x(\lambda)$, deci atît λ cît și $\bar{\lambda}$ sînt valori finite. Avem

$$\underline{\lambda} = \max_{\bar{\zeta}_s > 0} \left[\frac{\bar{x}_s}{\bar{\zeta}_s}\right] = \max\left(-\frac{16}{9{,}2}\,;\ -\frac{20}{54}\right) = -0{,}37\,;$$

$$\bar{\lambda} = \frac{15}{7} = 2{,}14\,,$$

deci B_3 este optimă cînd $-0{,}37 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}14$.

Pentru $\lambda = 2{,}14$ se anulează x_3 și soluția este $x_1 = 0$; $x_2 = 35{,}7$; $x_3 = 0$; $x_4 = 135{,}7$; $x_5 = 0$. Această soluție fiind degenerată ($x_3 = 0$) se poate găsi o nouă bază optimă pentru $\lambda = 2{,}14$, înlocuind vectorul a_3. În acest scop se calculează linia a doua (corespunzătoare componentei x_3) din tabelul iterației 3, făcînd produsele scalare dintre linia a doua din B_3^{-1} și vectorii-coloană din matricea inițială. Găsim că linia a doua, în iterația 3, are elementele 0,4 ; 0 ; 1 ; 0 ; 2,08 ; celelalte elemente nu se calculează, fiindcă variabilele corespunzătoare sînt eliminate.

Vectorul care înlocuiește pe a_3 în bază trebuie determinat folosind algoritmul simplex dual, dar în linia a doua nu există nici un element negativ, deci nu există baza optimă dacă $\lambda > 2{,}14$.

Pentru $\lambda = -0{,}37$ se anulează x_4 și soluția este $x_1 = 0$; $x_2 = 12{,}6$; $x_3 = 42{,}2$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$. Soluția este degenerată ($x_4 = 0$). Încercăm eliminarea vectorului a_4 din bază și în acest scop calculăm linia a treia în baza optimă pentru $\lambda = 0$. Linia a treia în iterația 3 are elementele -1 ; 0 ; 1 ; $-4{,}4$; celelalte elemente nu interesează, deoarece variabilele corespunzătoare sînt eliminate.

Se determină vectorul care intră în bază făcînd rapoartele dintre elementele negative ale liniei a treia și factorii relativi de cost corespunzători și alegînd raportul minim.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$\min\left[\frac{0,8}{1}\ ;\ \frac{3,36}{4,4}\right]=\frac{3,36}{4,4}\ ;$$

minimul corespunde vectorului a_5 care va înlocui în bază pe a_3.

Iterația 4

(72)

Variabile din bază	Inversa bazei			Constanta pentru	
	x_6	x_7	x_8	$\lambda=-0,37$	$\lambda'=-0,37+\lambda$
x_2	−0,21	−0,14	0,12	12,6	12,6 + 33,09 λ
x_5	−0,05	0,03	−0,02	42,2	42,2 − 8,72 λ
x_4	0,09	0,13	0,18	0	− 12,27 λ

Baza B_4 este optimă pentru $-0,38 \leqslant \lambda \leqslant -0,37$. Cînd $\lambda=-0,38$ se anulează x_2 și se determină o nouă bază dacă x_2 poate fi înlocuit. În exemplul studiat acest lucru este posibil și se va găsi baza B_5, optimă pentru $\lambda' \leqslant \lambda \leqslant -0,38$. Se continuă aplicarea algoritmului pînă se găsește $\lambda'=-\infty$ sau se dovedește că nu există soluție pentru valorile parametrului mai mici decît ultimul λ' determinat.

5. Interpretarea geometrică

Pentru a găsi interpretarea geometrică a rezolvării problemelor de programare în care vectorul d este variabil, să rezolvăm un exemplu numeric în care spațiul condițiilor este bidimensional.

Exemplul II. Să se găsească soluțiile optime pentru:

$$x_1+2x_2+3x_3+4x_4 \geqslant 7+3\lambda,$$

$$2x_1+x_2+x_3+2x_4 \geqslant 3-\lambda,$$

$$x_i \geqslant 0\ ;\ i=1,\ \ldots,\ 4$$

$$\max z=6x_1+3x_2+2x_3+4x_4.$$

Rezolvăm problema pentru $\lambda=0$ prin algoritmul primal simplex și folosim metoda penalizării pentru excluderea variabilelor artificiale din bază. După două iterații se găsește soluția optimă $x_3=1$, $x_4=1$ și celelalte variabile egale cu zero. Notăm cu B_2 baza acestei iterații.

Scanned with OKEN Scanner

c_B ↓	$c_j \rightarrow$		6	3	2	4	M	M
	Baza	$d^{(0)}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
M	a_5	7	1	2	3	4	1	0
M	$\leftarrow a_6$	3	2	1	1	2*	0	1
	$z_j - c_j$	$10M$	$3M$ -6	$3M$ -3	$4M$ -2	$6M$ -4	0	0
M	$\leftarrow a_5$	1	-3	0	1*	0	1	-2
4	a_4	3/2	1	1/2	1/2	1	0	1/2
	$z_j - c_j$	M 6	$-3M$ -2	-1	M	0	0	
2	a_3	1	-3	0	1	0	1	-2
4	a_4	1	5/2	1/2	0	1	$-1/2$	3/2
	$z_j - c_j$	6	-1	-1	0	0		

Căutăm mulțimea valorilor parametrului λ pentru care B_2 este optimă, calculînd componentele vectorului $(7+3\lambda;\ 3-\lambda)$ în această bază, adică

$$x(\lambda) = B^{-1}(d^{(0)} + \lambda d^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7+3\lambda \\ 3-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5\lambda \\ 1-3\lambda \end{bmatrix}.$$

De aici se observă că B_2 este optimă pentru $-1/5 \leqslant \lambda \leqslant 1/3$, fiindcă ambele componente ale soluției sînt nenegative cînd λ ia valori în acest interval.

Pentru $\lambda = 1/3$ soluția este $x_3 = 8/3$; $x_4 = 0$. Cînd $\lambda > 1/3$, x_4 devine negativ, dar soluția fiind dual-realizabilă se folosește algoritmul simplex dual pentru schimbarea bazei. Linia a_4 nu are însă nici un element negativ în tabelul ultimei iterații, deci nu se poate obține o soluție realizabilă dacă $\lambda > 1/3$ și pentru $\lambda = 1/3$ baza $(a_3 a_4)$ este singura bază optimă.

Pentru $\lambda = -1/5$ soluția este $x_3 = 0$; $x_4 = 8/5$. Cînd $\lambda < -1/5$, x_4 devine negativ; cercetînd elementele liniei a_3 în ultima iterație

Scanned with OKEN Scanner

găsim o valoare negativă în coloana a_1, deci noua bază este formată din (a_1, a_4).

Tabelul iteraţiilor pentru $\lambda = -1/5$

(74)

c_B ↓	$c_j \rightarrow$		6	3	2	4	M	M
	Baza	d	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	$\leftarrow a_3$	0	−3*	0	1	0	1	−2
4	a_4	8/5	5/2	1/2	0	1	−1/2	3/2
$z_j - c_j$		32/5	−2	−1	0	0		
6	a_1	0	1	0	−1/3	0		
4	a_4	8/5	0	1/2	5/6	1		
$z_j - c_j$		32/5	0	−1	−2/3	0		

Nu se mai poate găsi altă bază optimă pentru $\lambda = -1/5$, fiindcă pe linia componentei nule a soluţiei nu există decît un element negativ în coloana a_3. Dacă se ia acest element ca pivot se revine la baza (a_3, a_4) din iteraţia anterioară, deci pentru $\lambda = -1/5$ există două baze optime, B_2 (a_3, a_4) şi $B_3(a_1, a_4)$. Căutăm mulţimea valorilor parametrului pentru care B_3 rămîne optimă, calculînd

$$x(\lambda) = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 + 3\lambda \\ 3 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 - 5/3\lambda \\ 11/6 + 7/6\lambda \end{bmatrix}.$$

Condiţiile de nenegativitate a componentelor soluţiei în B_3 sînt satisfăcute pentru $-11/7 \leqslant \lambda \leqslant -1/5$.

Dacă $\lambda = -11/7$ soluţia este $x_1 = 16/7$; $x_4 = 0$. Cînd $\lambda = -11/7$, x_4 devine negativ şi problema nu mai are soluţii realizabile, deoarece în linia a_4 a ultimei iteraţii nu sînt elemente negative. Problema este complet rezolvată şi discuţia se poate rezuma în modul prezentat în fig. 1.

Pentru a interpreta geometric rezultatele din acest exemplu vom reprezenta grafic vectorii matricei A şi vectorii $d^{(0)}$, $d^{(1)}$. Se ştie că un sistem de ecuaţii liniare are soluţii nenegative în baza B dacă vec-

Scanned with OKEN Scanner

torul format din termenii constanți este un element al conului generat de vectorii acestei baze.

În fig. 2 vectorul $d^{(0)}$ este un element al conului generat de a_3 și a_4, deci pentru $\lambda = 0$ soluția are componente pozitive în baza $B_2(a_3, a_4)$. Cînd $\lambda > 0$ vectorul $d^{(0)} + \lambda d^{(1)}$ este un element al conului generat de $d^{(0)}$ și $d^{(1)}$. Acest con nu este în întregime cuprins în conul (a_3, a_4), deci soluția nu este realizabilă pentru orice $\lambda > 0$. Se poate determina grafic cel mai mare λ pentru care soluția asociată bazei (a_3, a_4) este

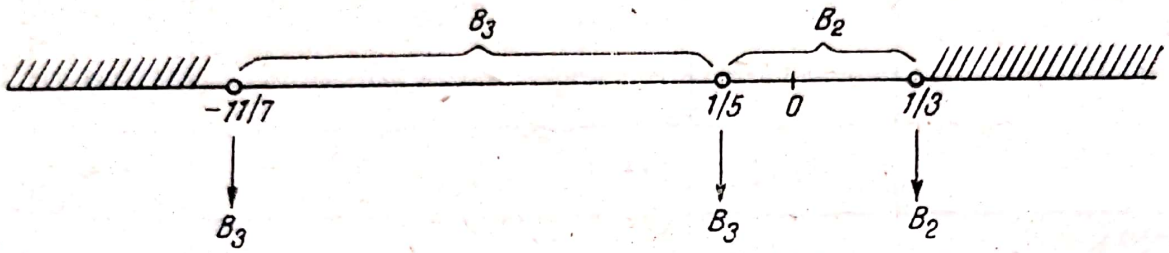


Fig. 1

realizabilă, construind paralelogramul cu o latură egală cu norma vectorului $d^{(0)}$, cealaltă latură situată pe suportul vectorului $d^{(1)}$ și diagonala situată pe suportul lui a_3. Pentru $\lambda > 1/3$ vectorul $d = d^{(0)} + \lambda d^{(1)}$ nu mai aparține conului generat de a_3 și a_4 și nici altui con generat de

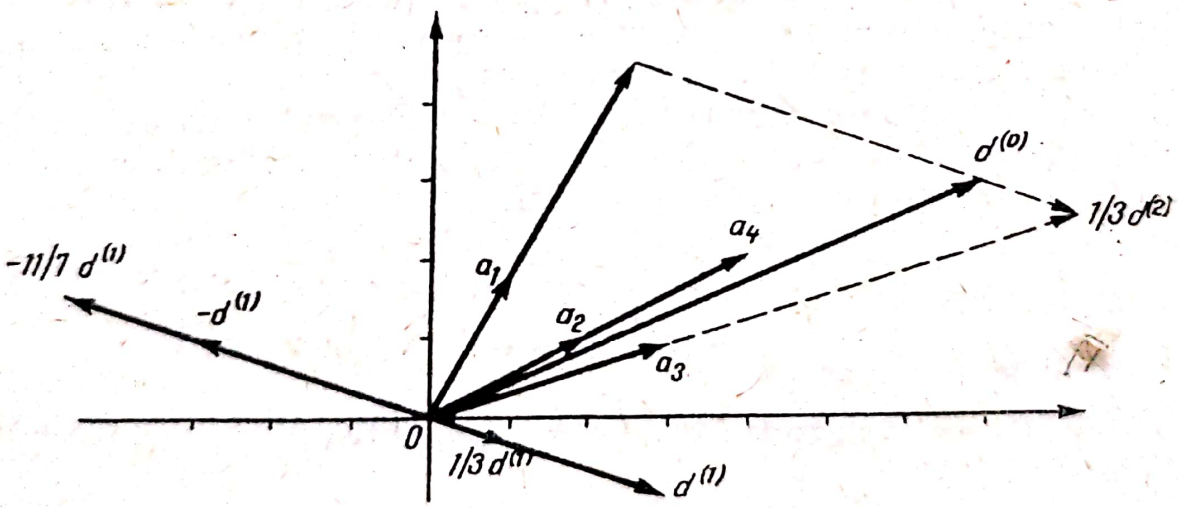


Fig. 2

vectorii matricei A, deci problema nu mai are soluții realizabile. Cînd $\lambda = 1/3$ vectorul d coincide cu a_3 și soluția este degenerată. Pentru $\lambda = 0$, d este un element al conului generat de $d^{(0)}$ și $d^{(1)}$. Acest con are elemente comune cu conurile generate de vectorii a_3, a_4 și a_4, a_1, deci pentru $\lambda < 0$ avem soluții realizabile în bazele (a_3, a_4) și (a_4, a_1).

Scanned with OKEN Scanner

În fig. 2 s-a construit vectorul $-11/7\, d^{(1)}$, cea mai mică valoare a lui λ pentru care există soluții realizabile.

Soluțiile realizabile sînt optime cînd sînt îndeplinite condițiile $z_j - c_j \leqslant 0$ (în problemele de minim), pentru vectorii care nu aparțin bazei. Din cele de mai înainte se deduce că:

— baza (a_3, a_4) este optimă atîta cît timp vectorul $d = d^{(0)} + \lambda d^{(1)}$ este un element al conului generat de vectorii bazei;

— valorile critice ale parametrului sînt acelea pentru care d coincide cu unul dintre vectorii bazei;

— problema are soluții pentru valorile lui λ exterioare intervalului determinat de valorile critice (λ_1, λ_2), dacă există un con generat de vectorii bazei care să aibă elemente comune cu conul $d^{(0)} + \lambda d^{(1)}$, $\lambda \notin \notin (\lambda_1, \lambda_2)$.

6. Vectorul d funcție liniară de mai mulți parametri

Să presupunem că în problema de programare liniară

$$Ax = d, \qquad \text{(III.2.10)}$$
$$x \geqslant 0;$$
$$\max(\min)\, z = cx$$

vectorul $d = d^{(0)} + \sum_{s \in S} \lambda_s d^{(s)}$, unde $S = \{1, \ldots, p\}$, iar λ_s sînt parametri care pot lua valori pe mulțimea numerelor reale. Din interpretarea geometrică a cazului în care d este funcție liniară de un singur parametru se deduce că problema propusă are soluții realizabile cînd d este un element al conului (C) generat de vectorii unei baze B din matricea A. Vectorul $d^{(0)} + \sum_{s \in S} \lambda_s d^{(s)}$ este un element al conului (D) generat de $d^{(0)}, d^{(s)}$; $s \in S$, cînd toți λ_s sînt nenegativi. Soluția asociată bazei B este realizabilă cînd parametrii λ_s iau valori pentru care conul (D) are elemente comune cu (C).

Revenind la expresia analitică a problemei să notăm cu M matricea formată din componentele vectorilor $d^{(s)}$; $s \in S$ și cu λ vectorul-coloană cu elementele λ_s; $s \in S$. Fie B o bază căreia îi corespunde o soluție dual-realizabilă

$$x = B^{-1}(d^{(0)} + \sum_{s \in S} \lambda_s d^{(s)}). \qquad \text{(III.2.11)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu notaţiile adoptate (III.2.11) se scrie

$$x = B^{-1}d^{(0)} + B^{-1}M\lambda. \qquad \text{(III.2.12)}$$

Soluţia (III.2.12) este optimă pentru orice vector λ pentru care

$$B^{-1}d^{(0)} + B^{-1}M\lambda \geqslant 0. \qquad \text{(III.2.13)}$$

Această condiţie este echivalentă cu un sistem de $(n-m)$ inecuaţii liniare cu s necunoscute. Dacă sistemul (III.2.13) este compatibil, soluţiile constituie un domeniu convex în spaţiul R^s. Pentru orice punct din acest domeniu, B este bază optimă; în punctele frontieră ale domeniului soluţia este degenerată (vectorul d este coliniar cu unul din vectorii bazei). Problema admite soluţii şi în afara acestui domeniu, dacă pentru punctele frontieră există cel puţin încă o bază optimă în afară de B.

Teoretic problema este rezolvată, însă determinarea domeniilor de optimalitate corespunzătoare fiecărei baze căreia îi este asociată o soluţie dual-realizabilă este dificilă dacă λ aparţine unui spaţiu cu mai mult de trei dimensiuni.

În problemele reale parametrii λ_s au de obicei variaţii limitate la intervale finite şi aceste condiţii simplifică mult discuţia.

Exemplul III. Să se determine soluţiile care maximizează funcţia

$$z = 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4, \qquad \text{(III.2.14)}$$

cu condiţiile

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leqslant 8 + \lambda_1 + \lambda_2, \\ x_2 + 3x_4 &\leqslant 6 + \lambda_2, \\ -2x_1 + x_3 + x_4 &\geqslant 8 - 5\lambda_1 \end{aligned} \qquad \text{(III.2.15)}$$

pentru $6 < \lambda_1 < 10$; $-3 \leqslant \lambda_2 \leqslant 10$.

Inegalităţile (III.2.15) se transformă în ecuaţii prin adăugarea variabilelor de abatere x_5, x_6 şi x_7 după ce ultima condiţie se înmulţeşte cu -1. Funcţia obiectiv nu se modifică. Folosim algoritmul simplex primal şi determinăm vectorul care intră în bază, ţinînd seama numai

Scanned with OKEN Scanner

de componentele constante ale vectorului d. Iterațiile sînt redate în tabelul următor:

(75)

	c_B ↓	Baza	$c_j \rightarrow$ d	3 a_1	−1 a_2	1 a_3	2 a_4	0 a_5	0 a_6	0 a_7
B_1	0	$\leftarrow a_5$	$8 + \lambda_1 + \lambda_2$	1*	1	2	0	1		
	0	a_6	$6 + \lambda_2$	0	1	0	3		1	
	0	a_7	$-8 + 5\lambda_1$	2	0	−1	−1			1
	$z_j - c_j$		0	−3	1	−1	−2	0	0	0
B_2	3	a_1	$8 + \lambda_1 + \lambda_2$	1	1	2	0	1		
	0	$\leftarrow a_6$	$6 + \lambda_2$		1	0	3*	0	1	
	0	a_7	$-24 + 3\lambda_1 - 2\lambda_2$		−2	−5	−1	−2		1
	$z_j - c_j$		$24 + 3\lambda_1 + 3\lambda_2$	0	4	5	−2	3	0	0
B_3	3	a_1	$8 + \lambda_1 + \lambda_2$	1	1	2		1	0	
	2	a_4	$2 + 1/3\lambda_2$		1/3	0	1	0	1/3	
	0	$\leftarrow a_7$	$-22 + 3\lambda_1 - 5/3\lambda_2$		−5/3	−5*		−2	1/3	1
	$z_j - c_j$		$28 + 3\lambda_1 + 11/3\lambda_2$	0	14/3	5	0	3	2/3	0
B_4	3	a_1	$-4/5 + \frac{11}{5}\lambda_1 + 1/3\lambda_2$	1	1/3			1/5	2/15	2/5
	2	a_4	$2 + 1/3\lambda_2$		1/3		1	0	1/3	0
	1	a_3	$22/5 - 3/5\lambda_1 + 1/3\lambda_2$		1/3	1		2/5	−1/15	−1/5
	$z_j - c_j$		$6 + 6/5\lambda_1 + 2\lambda_2$	0	3	0	0	1	1	1

Diferențele $z_j - c_j$ în baza $B_3 = (a_1, a_4, a_7)$ sînt nenegative pentru toți vectorii care nu aparțin bazei, deci soluția este dual-realizabilă și optimă pe mulțimea soluțiilor sistemului format din condițiile de

Scanned with OKEN Scanner

nenegativitate ale componentelor vectorului d în această bază. Aceste condiții sînt

$$\begin{aligned} d_1 &= 8 + \lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 0, \\ d_4 &= 2 + 1/3\lambda_2 \geqslant 0, \\ d_7 &= -22 + 3\lambda_1 - 5/3\lambda_2 \geqslant 0. \end{aligned} \qquad \text{(III.2.16)}$$

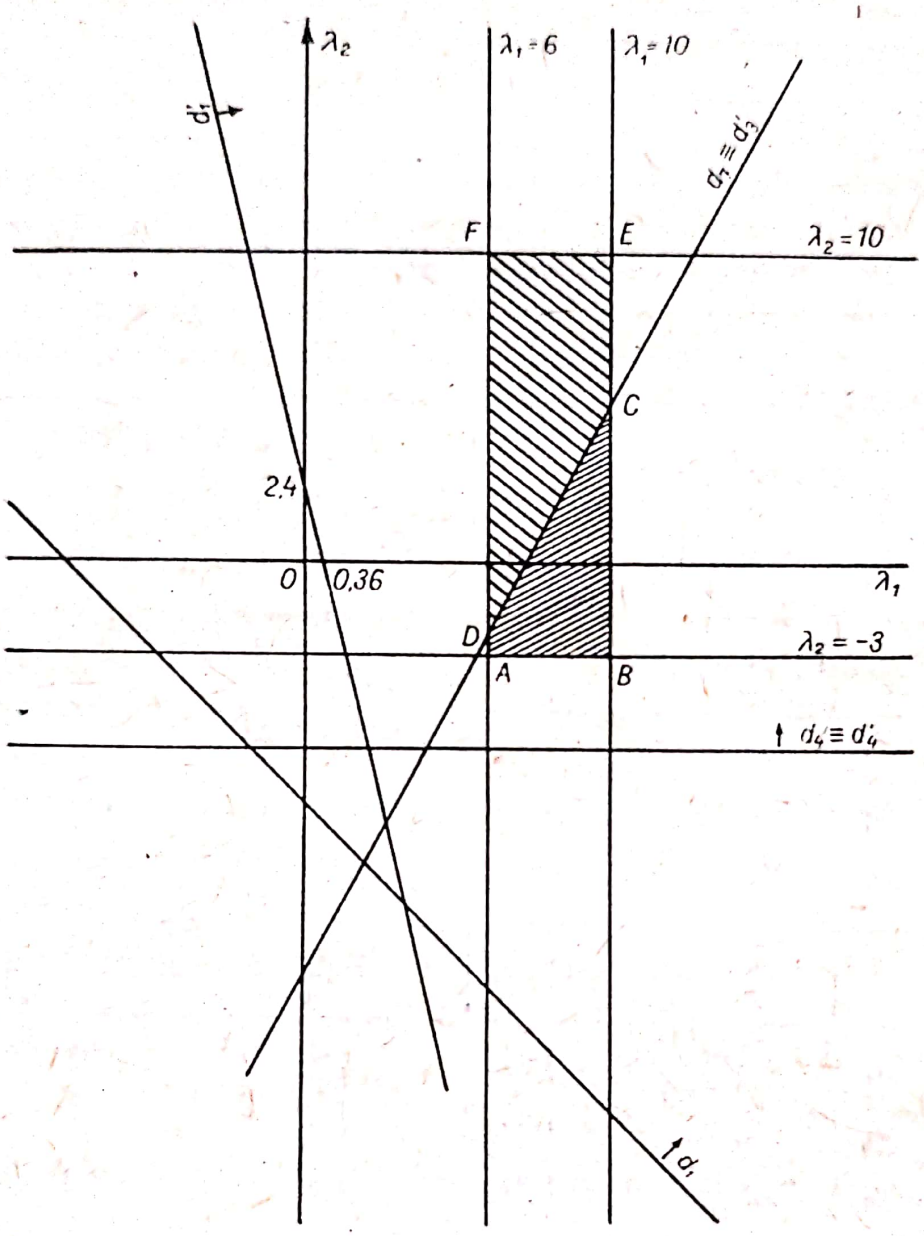


Fig. 3

Soluțiile sistemului (III.2.16) constituie un domeniu convex în planul $\lambda_1\ \lambda_2$, din care, în această problemă, interesează numai dreptunghiul limitat de dreptele $\lambda_1 = 6$; $\lambda_1 = 10$; $\lambda_2 = -3$; $\lambda_2 = 10$.

În fig. 3 sînt reprezentate grafic dreptele d_1, d_4, d_7 și domeniul convex $ABCD$ pe care B_3 este bază optimă.

Scanned with OKEN Scanner

În regiunea situată deasupra dreptei d_7, x_7 este negativ dar soluția rămîne dual-realizabilă, deci se folosește algoritmul dual-simplex pentru determinarea bazei B_4. Această bază este optimă pe mulțimea soluțiilor sistemului

$$\begin{aligned} d'_1 &= -4/5 + 11/5\lambda_1 + 1/3\lambda_2 \geqslant 0, \\ d'_4 &= \quad 2 \qquad\quad + 1/3\lambda_2 \geqslant 0, \\ d'_3 &= 22/5 - 3/5\lambda_1 + 1/3\lambda_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{III.2.17}$$

Observăm că $d'_4 = d_4$ și $d'_3 = -1/5 d_7$. Reprezentăm dreapta $d'_1 = 0$ și obținem domeniul $DCEF$ de optimalitate a bazei B_4.

În regiunea situată deasupra dreptei d'_1, x'_1 este negativ, însă toate elementele din tabelul B_4 situate pe linia vectorului a_1 sînt pozitive, deci nu se poate face schimbarea bazei. De altfel din fig. 3 se observă că s-au determinat bazele optime pe tot domeniul de variație al parametrilor.

Valorile critice ale parametrilor sînt reprezentate grafic prin mulțimea de puncte $\overline{DC}$. Această mulțime se poate scrie ca o combinație liniară convexă de punctele D și C; dacă se calculează coordonatele punctelor D și C, găsim $D(6\,;\ -2{,}4)$: $C(10\,;\ 4{,}8)$ și avem relațiile

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \quad 6\alpha + 10\beta, \\ \lambda_2 &= -2{,}4\alpha + 4{,}8\beta, \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 &\qquad 0 \leqslant \beta \leqslant 1 \qquad \alpha + \beta = 1, \end{aligned} \tag{III.2.18}$$

care exprimă analitic mulțimea valorilor critice ale parametrilor λ_1 și λ_2 situate pe segmentul DC. Pentru orice sistem de valori $(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ dat de relațiile (III.2.18) problema admite două baze optime B_3 și B_4.

7. Vectorul „d" funcție neliniară de unul sau mai mulți parametri

Modelul matematic al acestei probleme este

$$\begin{aligned} &Ax = d(\lambda_p)\,; \qquad p \in S = \{1, \ldots, s\}, \\ &x \geqslant 0\,; \\ &\max(\min) z = cx, \end{aligned} \tag{III.2.19}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $d(\lambda_p)$ este funcție neliniară de parametrii λ_p; $p \in S$. Ca și în cazurile discutate anterior, problema se rezolvă determinînd o bază dual-realizabilă B și căutînd valorile parametrilor λ_p care satisfac condițiile de nenegativitate a componentelor vectorului $d(\lambda_p)$ în baza B. Dacă mulțimea S conține un singur element, condiția ca vectorul

$$x_B = B^{-1}d(\lambda_p) \qquad \text{(III.2.20)}$$

să fie nenegativ conduce la determinarea unui interval de optimalitate a bazei B; dacă mulțimea S conține s elemente se determină un domeniu în spațiul s-dimensional pentru care B este bază optimă. Extremitățile intervalului sau punctele frontieră ale domeniului astfel determinat constituie valorile critice ale parametrilor. Pentru punctele exterioare intervalului sau domeniului de optimalitate a bazei B, cel puțin o componentă a vectorului x_B devine negativă și folosind algoritmul simplex dual se obține o nouă bază optimă. Studiul problemei este complet cînd se acoperă întreaga mulțime a valorilor pe care le pot lua parametrii cu domenii pentru care se cunosc bazele optime. Calculele necesare determinării valorilor critice ale parametrilor sînt mai simple cînd componentele vectorului $d(\lambda_i)$ sînt polinoame.

Exemplul IV. Dispunem de patru feluri de materii prime M_i; $i = 1, \ldots, 4$, din care se pot fabrica cinci produse P_j; $j = 1, \ldots, 5$. Se urmărește alegerea unui sortiment de produse care să necesite folosirea unei cantități cît mai mici din materia primă M_4. Datele problemei sînt cuprinse în tabelul următor:

Materii prime	Produse					Disponibil
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
M_1	2	4	1	—	1	$10 + \alpha + \alpha^2$
M_2	1	—	5	1	6	$10 - 2\alpha^2$
M_3	—	1	4	2	—	20
M_4	3	2	1	4	2	

Cantitățile disponibile din primele două materii prime sînt funcții de parametrul α, care poate lua valori în intervalul $[0; 5]$.

Scanned with OKEN Scanner

Notăm cu x_i ; $i = 1, \ldots, 5$ cantităţile din P_i ; $i = 1, \ldots, 5$ care se vor produce. Modelul problemei este

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 \quad + x_5 &\geqslant 10 + \alpha + \alpha^2, \\ x_1 + 5x_3 + x_4 + 6x_5 &\geqslant 10 - 2\alpha^2, \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\geqslant 20 ; \\ \min f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5. & \end{aligned} \qquad \text{(III.2.21)}$$

Restricţiile referitoare la consumul de materii prime M_1, M_2, M_3 trebuie să fie inecuaţii cu semnul $\geqslant$, căci altfel minimul funcţiei obiectiv este nul.

Folosim metoda simplex revizuită, deci transformăm sistemul (III.2.21) în :

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 + x_6 &= 10 + \alpha + \alpha^2, \\ x_1 + 5x_3 + x_4 + 6x_5 + x_7 &= 10 - 2\alpha^2, \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_8 &= 20, \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 3x_4 + 7x_5 + w &= 40 + \alpha - \alpha^2, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 - 2x_5 + z &= 0. \end{aligned}$$

Obiectivul urmărit în prima fază a aplicării algoritmului este minimizarea funcţiei w.

Tabelul iniţial pentru exemplul IV

(77)

Variabile din bază	Variabile de structură					Variabile artificiale					Constante
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	w	z	
x_6	2	4	1	0	1	1					$10 + \alpha + \alpha^2$
x_7	1	0	5	1	6		1				$10 - 2\alpha^2$
x_8	0	1	4	2	0			1			20
w	3	5	10	3	7				1		$40 + \alpha - \alpha^2$
z	−3	−2	−1	−4	−2					1	0

Redăm tabelul factorilor relativi de cost din cele trei iteraţii necesare fazei I. În iteraţia 3 minimul funcţiei w este zero, deci toate

Scanned with OKEN Scanner

variabilele artificiale au fost excluse din bază. Soluția pentru care $w = 0$ este dual-realizabilă pentru funcția obiectiv z, deoarece toți factorii relativi de cost asociați variabilelor de structură sînt nepozitivi.

Tabelul factorilor relativi de cost **(78)**

Ciclul		Variabile							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
$\overline{a}_{0j}$	0	3	5	10*	3	7	0	0	0
	1	1	5*	0	1	−5	0	−2	0
	2	−5/4	0	0	5/4*	−19/4	−5/4	−7/4	0
	3	0	0	0	0	0	−1	−1	−1
$\overline{c}_{0j}$	3	−14/5	0	0	0	−108/25	8/25	−11/25	18/25

Așa cum rezultă și din tabelul factorilor relativi de cost, în iterația 3 baza este formată din a_2, a_3 și a_4. Pentru calculele care urmează este necesar să cunoaștem inversa acestei baze, de aceea o redăm:

(79)

Variabile din bază	Inversa bazei			w	z
	x_6	x_7	x_8		
x_2	6/25	−2/25	1/25		
x_3	1/25	8/25	−4/25		
x_4	−1/5	−3/5	4/5		
w	−1	−1	−1	1	
z	8/25	−11/25	18/25		1

Se calculează soluția asociată bazei $B(a_3, a_2, a_4)$ cu ajutorul formulei $x_B = B^{-1}d$ astfel:

$$x_2 = 2/25\ (5\alpha^2 + 3\alpha + 30);$$

$$x_3 = 1/25(-15\alpha^2 + \alpha + 10);\ x_4 = 1/5(5\alpha^2 - \alpha + 40).$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția este realizabilă, deci optimă dacă $\alpha = 0$. Pentru determinarea intervalului în care baza B rămîne optimă se observă că $x_2 > 0$ dacă $\alpha > 0$; semnele componentelor x_3 și x_5 se stabilesc rezolvînd ecuațiile $x_3 = 0$; $x_4 = 0$. Astfel obținem:

$$15\alpha^2 - \alpha - 10 = 0 \qquad \text{pentru} \qquad \alpha_1 = -0{,}76\,;\ \alpha_2 = 0{,}83,$$

$$5\alpha^2 - \alpha + 40 \neq 0 \qquad \text{pentru orice } \alpha \text{ real.}$$

Din aceste rezultate se deduce că toate componentele soluției sînt pozitive cînd $-0{,}76 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}83$. Problema implică variația parametrului în intervalul $[0\,;\,5]$, deci trebuie găsită baza optimă și pentru $\alpha > 0{,}83$.

Dacă $\alpha > 0{,}83$ variabila x_3 devine negativă și pentru excluderea ei din bază trebuie calculate elementele liniei a doua a tabelului inițial în baza B. Se știe că aceste elemente sînt egale cu produsele scalare ale fiecărui vector din tabelul inițial cu linia a doua din inversa bazei. În acest fel găsim

linia a doua în baza $B\{10/25\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 0\,;\ 49/25\,;\ 1/25\,;\ 8/25\,;\ -4/25\}$.

Singurul element negativ din această linie corespunde variabilei artificiale x_8, care nu poate intra în bază, deci problema nu are soluții pentru $\alpha > 0{,}83$.

Exemplul V. Vom relua problema precedentă înlocuind termenii din membrul drept al restricțiilor prin

$$D_1 = \alpha^2 + 2\beta^2\,;\quad D_2 = 5\,;\quad D_3 = 10 - 2\beta^2 \qquad \alpha > 0\,;\ \beta \text{ oarecare.}$$

Soluția asociată bazei $B_1(a_2, a_3, a_4)$ pentru problema modificată este

$$x_2 = 2/25(3\alpha^2 + 5\beta^2)\,;\quad x_3 = 1/25(\alpha^2 + 10\beta^2)\,;$$

$$x_4 = 1/5(25 - \alpha^2 - 10\beta^2).$$

Primele două componente ale soluției sînt nenegative în tot planul (α, β), dar $x_4 > 0$ numai în punctele interioare elipsei:

$$(E_1)\ \frac{\alpha^2}{25} + \frac{\beta^2}{\frac{5}{2}} - 1 = 0.$$

Semiaxele elipsei E_1 sînt $a_1 = 5$; $b \approx 1{,}6$. În fig. 4 este reprezentată această curbă și domeniul în care B_1 este bază optimă. În exteriorul

acestui domeniu componenta x_4 a soluției este negativă. Pentru schimbarea bazei se calculează

linia a treia în baza $B_1\{-1;\ 0;\ 0;\ 1;\ -19/5;\ -1/5;\ -3/5;\ 4/5\}$.

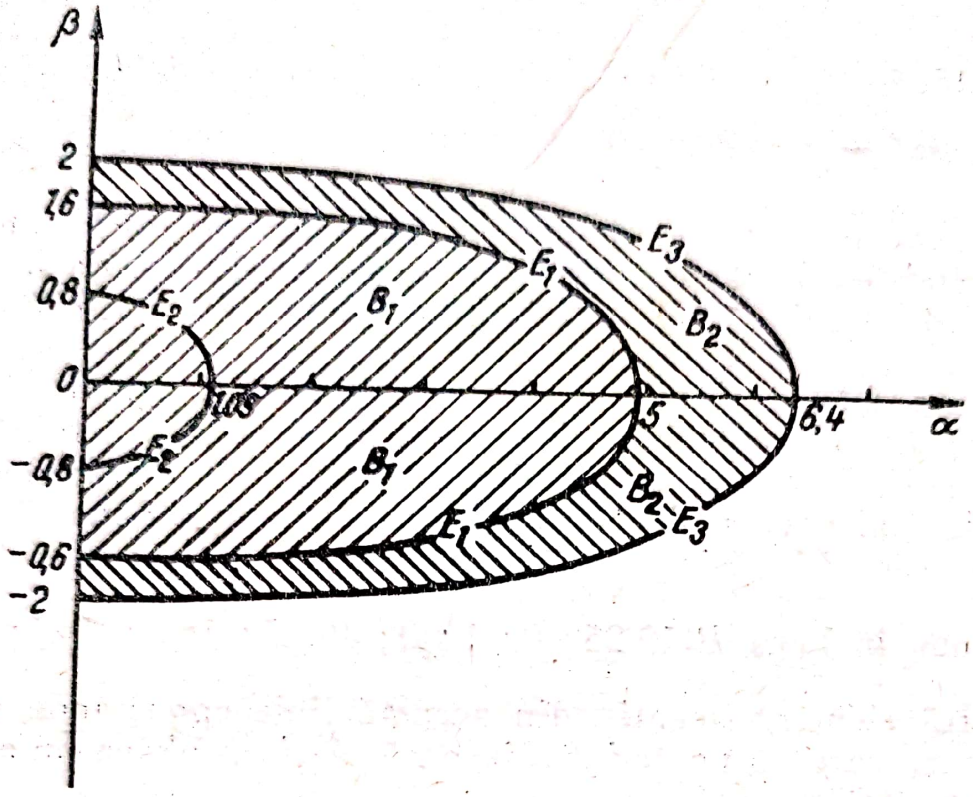


Fig. 4

În această linie, elementele negative corespunzătoare variabilelor de structură sînt -1 și $-19/5$; criteriul de intrare în bază din algoritmul dual simplex arată că a_5 înlocuiește în B pe a_4. Inversa bazei $B_2'(a_2, a_3, a_5)$ este:

(80)

Variabile din bază	Inversa bazei			w	z
	x_6	x_7	x_8		
x_2	24/95	−4/95	−1/95		
x_3	−6/95	1/95	24/95		
x_5	1/19	3/19	−4/19		
w	−1	−1	−1	1	
z	52/95	23/95	−18/95		1

Scanned with OKEN Scanner

iar componentele soluției asociate acestei baze sînt:

$$x_2 = 2/95(12\alpha^2 + 25\beta^2 - 15); \quad x_3 = 1/95(-6\alpha^2 - 60\beta^2 + 245),$$
$$x_5 = 1/19(\alpha^2 + 10\beta^2 - 25).$$

În fig. 4 sînt reprezentate grafic și elipsele:

$$(E_2)\ \frac{\alpha^2}{\frac{5}{4}} + \frac{\beta^2}{\frac{3}{5}} - 1 = 0; \quad (E_3)\ \frac{\alpha^2}{\frac{245}{6}} + \frac{\beta^2}{\frac{245}{60}} - 1 = 0.$$

Condițiile $x_2 \geqslant 0$; $x_3 \geqslant 0$; $x_5 \geqslant 0$ sînt satisfăcute simultan în domeniul cuprins între E_2 și E_3, deci în acest domeniu B_2 este bază optimă.

În punctele exterioare elipsei E_3, componenta x_5 a soluției devine negativă. Pentru determinarea unei noi baze optime se calculează linia a treia în baza B_2' {5/19, 0, 0, —5/19, 1, 1/19, 3/19, —4/19}.

Singurul element negativ din această linie, corespunzător unui vector de structură, este —5/19 pentru a_4. Dacă a_4 înlocuiește pe a_5 în B_2' revenim la baza B_1, deci problema nu admite soluții optime în punctele exterioare elipsei E_3.

Din rezolvarea exemplelor I—V se desprind următoarele:

Observații. Dacă vectorul d este funcție de un singur parametru, valorile critice sînt puncte care separă domeniile unidimensionale de optimalitate a două baze diferite.

Dacă vectorul d depinde liniar sau neliniar de n parametri, valorile critice constituie suprafețe cu $(n - 1)$ dimensiuni, care formează frontierele domeniilor n-dimensionale pe care o bază determinată este optimă.

§ 3. PARAMETRIZAREA VECTORULUI „PREȚURILOR"

1. Introducere

Să presupunem că în problema de programare liniară

$$\begin{aligned} Ax &= d, \\ x &\geqslant 0; \\ \max z &= cx, \end{aligned} \qquad \text{(III.3.1)}$$

vectorul c, care poate fi interpretat din punct de vedere economic ca vector al prețurilor, este o mărime variabilă, variația sa fiind determinată de unul sau mai mulți parametri. În această ipoteză, soluțiile realizabile, deci și soluția optimă, depind de aceiași parametri și rezolvarea problemei comportă determinarea soluțiilor optime corespunzătoare variației vectorului c. În vederea unui studiu sistematic al problemei enunțate se vor considera cazurile în care c este funcție:

- liniară de un parametru;
- liniară de doi sau mai mulți parametri;
- neliniară de un parametru;
- neliniară de mai mulți parametri.

Vom analiza mai amplu cazul în care vectorul c este funcție liniară de un parametru, analiză care va înlesni tratarea celorlalte cazuri.

2. Vectorul c funcție liniară de un parametru

Fie λ un parametru care ia valori pe mulțimea numerelor reale. Vectorul c, funcție liniară de λ, se scrie

$$c = c^{(0)} + \lambda c^{(1)}. \tag{III.3.2}$$

Cu această notație, funcția obiectiv a problemei de programare parametrică are forma

$$\max z = c^{(0)} + \lambda c^{(1)}. \tag{III.3.3}$$

Explorarea mulțimii soluțiilor optime necesită cunoașterea unei soluții optime corespunzătoare unei valori particulare a parametrului. O astfel de soluție se caută folosind un algoritm simplex și ținînd seamă numai de componentele vectorului $c^{(0)}$ pentru determinarea vectorului care intră în bază. Fie B baza obținută după t iterații, I mulțimea vectorilor care constituie B și J mulțimea vectorilor matricei A care nu aparțin bazei B. Factorii relativi de cost, pentru baza B, sînt

$$\begin{aligned} z_j - c_j &= c_B g_j - c_j = (c^{(0)} + \lambda c^{(1)})_B g_j - (c^{(0)} + \lambda c^{(1)})_j = \\ &= (c_B^{(0)} g_j - c_j^{(0)}) + \lambda (c_B^{(1)} g_j - c_j^{(1)}) = \\ &= z_j^{(0)} - c_j^{(0)} + \lambda (z_j^{(1)} - c_j^{(1)}). \end{aligned} \tag{III.3.4}$$

Notăm cu

$$\alpha_j = z_j^{(0)} - c_j^{(0)}; \qquad \beta_j = z_j^{(1)} - c_j^{(1)} \tag{III.3.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

factorii relativi de cost, în baza B, asociaţi vectorilor c^0 şi $c^{(1)}$. Cu aceste notaţii avem

$$z_j - c_j = \alpha_j + \lambda\beta_j. \qquad \text{(III.3.6)}$$

Se pot prezenta următoarele situaţii:

1. $\alpha_j \geqslant 0$ pentru toţi $j \in J$. În acest caz B este o bază optimă a problemei pentru $\lambda = 0$ şi deci dispunem de soluţia căutată.

2. Există $\alpha_s < 0$ pentru o submulţime de vectori a_s, $s \in J_1 \subset J$ şi toate componentele g_{is}, $i \in I$ ale acestor vectori în baza B sînt negative. În acest caz, problema nu are optim finit pentru $\lambda = 0$. Dacă sistemul de inecuaţii

$$\alpha_s + \lambda\beta_s > 0\,; \qquad s \in J_1 \qquad \text{(III.3.7)}$$

nu este compatibil sau dacă un $\beta_s = 0\,;\ s \in I$, problema nu are optim finit pentru nici o valoare a parametrului λ. În situaţia în care sistemul (III.3.7) este compatibil se determină cea mai mică valoare λ_0 a parametrului care satisface toate inecuaţiile. Baza B este optimă pentru $\lambda = \lambda_0$ şi problema nu are optim finit pentru $\lambda < \lambda_0$.

Este uşor de arătat că sistemul (III.3.7) este incompatibil dacă şi numai dacă coeficienţii β_s nu sînt toţi de acelaşi semn. În adevăr, dacă pentru $s = s_1 \in J_1$ $\beta_{s_1} < 0$, condiţia $\alpha_{s_1} + \lambda\beta_{s_1} > 0$ este satisfăcută pentru valorile parametrului mai mici decît un număr negativ; dacă există un $s = s_2 \in J_1$ pentru care $\beta_{s_2} > 0$, condiţia $\alpha_{s_2} + \lambda\beta_{s_2} > 0$ este satisfăcută pentru valorile parametrului superioare unui număr pozitiv. Aceste mulţimi nu au elemente comune, deci sistemul (III.3.7) este incompatibil.

În concluzie, în problemele în care c este funcţie de un parametru se pot construi iteraţiile simplex, ţinînd seamă numai de componentele vectorului constant $c^{(0)}$ şi după un număr finit de iteraţii se ajunge la una din următoarele situaţii:

— se găseşte o bază B optimă pentru o valoare determinată a parametrului λ;

— se dovedeşte că problema propusă nu are soluţie optimă pentru nici o valoare a parametrului. Deoarece acest caz nu mai prezintă interes, în cele ce urmează vom admite că se cunoaşte baza optimă B pentru $\lambda = 0$. Această ipoteză nu limitează generalitatea discuţiei, deoarece o schimbare convenabilă a originei reduce cazul $\lambda = \lambda_0$ la $\lambda = 0$. Dacă dispunem de baza optimă B_1 pentru $\lambda = 0$, această bază rămîne optimă pentru toate valorile parametrului λ pentru care factorii relativi de cost sînt nenegativi, adică atîta timp cît

$$\alpha_j + \lambda\beta_j \geqslant 0\,; \qquad j \in J. \qquad \text{(III.3.8)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar α_j este nenegativ pentru toți $j \in J$, deoarece B_1 este optimă pentru $\lambda = 0$, prin urmare condițiile (III.3.8) sînt îndeplinite pentru $\underline{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant \bar{\lambda}$, unde

$$\underline{\lambda} = \begin{cases} \max\limits_{\beta_j > 0} \left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right), \\ \\ -\infty, \text{ dacă } \beta_j \leqslant 0 \text{ pentru toți } j \in J; \end{cases} \tag{III.3.9}$$

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} \min\limits_{\beta_j < 0} \left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right), \\ \\ +\infty, \text{ dacă } \beta_j \geqslant 0 \text{ pentru toți } j \in J. \end{cases} \tag{III.3.10}$$

Să presupunem că $\bar{\lambda}$ este o valoare finită ; minimul dat de (III.3.10) poate fi unic (caz particular $\bar{\lambda} = 0$) sau pot exista mai multe rapoarte $-\frac{\alpha_j}{\beta_j}$ a căror valoare să fie egală cu valoarea minimă. Vom analiza fiecare dintre aceste posibilități.

Cazul I. $\bar{\lambda}$ finit și unic determinat. Fie

$$\bar{\lambda} = \lambda_1 = -\frac{\alpha_k}{\beta_k} = \min_{\beta_j < 0} \left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right). \tag{III.3.11}$$

În această ipoteză, pentru $\lambda = \lambda_1$ există un singur vector a_k în mulțimea vectorilor care nu aparțin bazei B_1, pentru care diferența

$$z_k - c_k = \alpha_k + \lambda_1 \beta_k = 0.$$

Dacă $\lambda = \lambda_1 + \theta$, $\theta > 0$ diferența $z_k - c_k$ devine negativă. În adevăr, avem

$$z_k - c_k = \alpha'_k + (\lambda_1 + \theta)\beta_k = \alpha_k + \lambda_1 \beta_k + \theta \beta_k. \tag{III.3.12}$$

Deoarece $\alpha_k + \lambda_1 \beta_k = 0$ și $\beta_k < 0$ iar $\theta > 0$, urmează că

$$z_k - c_k = \theta \beta_k < 0,$$

deci a_k intră în bază dacă are cel puțin o componentă $g_{sk} > 0$; $s \in I$ și înlocuiește vectorul a_l, indicele l fiind determinat prin criteriul de ieșire din bază :

$$\frac{x_l}{g_{lk}} = \min_{s/g_{sk} > 0} \left[\frac{x_s}{g_{sk}} \right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Notăm cu B_2 noua bază. Diferențele $z_j - c_j$ în baza B_2 sînt

$$\bar{z}_k - \bar{c}_k = 0$$

și

$$z_j - \bar{c}_j = \alpha_j + (\lambda_1 + \theta)\beta_j - \frac{g_{lj}}{g_{lk}}\theta\,\beta_k =$$

$$= (\alpha_j + \lambda_1\beta_j) + \theta\left(\beta_j - \frac{g_{lj}}{g_{lk}}\beta_k\right), \qquad j \in J - \{k\}$$

unde, după cum se știe, $\alpha_j + \lambda_1\beta_j \geqslant 0$ pentru toți $j \in J - \{k\}$.

Dacă $\overline{\beta_j} = \beta_j - \frac{g_{lj}}{g_{lk}}\beta_k \geqslant 0$ pentru toți $j \in J - \{k\}$, toate diferențele $\bar{z}_j - \bar{c}_j$ rămîn pozitive pentru orice $\theta > 0$, deci noua bază B_2 este optimă pentru toate valorile $\lambda > \lambda_1$.

Dacă $\beta_j = \beta_j - \frac{g_{lj}}{g_{lk}}\beta_k < 0$ pentru o submulțime de vectori cu indicii $j \in J - \{k\}$, se determină valoarea

$$\theta_1 = \min_{\overline{\beta}_j < 0}\left[-\frac{\alpha_j + \lambda_1\beta_j}{\overline{\beta}_j}\right]; \qquad \text{(III.3.13)}$$

θ_1 dat de (III.3.13) este un număr pozitiv.

Baza B_2 este optimă, în acest caz, pentru toate valorile $\bar{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ unde $\lambda_2 = \lambda_1 + \theta_1$. Deoarece $\theta_1 > 0$ rezultă că $\lambda_2 > \lambda_1$. Dacă θ este finit se aplică același procedeu pentru a găsi o succesiune de baze $B_3, B_4, \ldots, B_p$ optime pentru valorile $\lambda \geqslant \bar{\lambda}$ și mai mici decît $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_p$, unde λ_p poate fi infinit. Din cele arătate mai înainte rezultă că șirul $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ este un șir strict crescător dacă $\alpha_j + \lambda_1\beta_j \neq 0$.

Un raționament analog conduce la construirea unei succesiuni de baze $B_1', B_2', \ldots, B_q'$ optime pentru $\lambda \leqslant \bar{\lambda}$ și mai mari decît $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_o'$, unde λ_q' poate fi $-\infty$, șirul valorilor λ_i' $(i = 1, 2, \ldots, q)$ fiind un șir strict descrescător. Valorile λ_j $(j = 1, \ldots, p)$ și λ_i' $(i = 1, \ldots, q)$ se numesc *valori critice* ale parametrului λ.

Aceste valori împart mulțimea valorilor reale ale parametrului în submulțimi caracterizate prin aceea că fiecăreia îi este asociată o anumită bază optimă. Fiecărei valori critice îi corespund două baze optime, deci o infinitate de soluții optime, combinațiile liniare convexe ale celor două soluții optime.

Cazul II. $\bar{\lambda} = \lambda_1$ nu este unic determinat, adică există o submulțime $J_1 \subset J$ pentru care se obține minimul din (III.3.10).

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz, pentru $\lambda = \lambda_1$ toți factorii relativi de cost asociați vectorilor a_s; $s \in J_1$ sînt nuli și problema admite mai multe soluții optime.

Dacă $\lambda = \lambda_1 + \theta$, $\theta > 0$ toți factorii relativi de cost asociați vectorilor a_s; $s \in J_1$ sînt negativi și sînt necesare mai multe schimbări de bază pentru optimizarea soluției. Deosebirea față de cazul precedent constă, deci, în aceea că bazele pentru $\lambda < \lambda_1$ și $\lambda > \lambda_1$ diferă, în general, prin mai mult decît un singur vector.

3. Algoritmul pentru determinarea valorilor critice

Din cele de mai înainte rezultă că algoritmul de rezolvare a problemelor de programare parametrică în care vectorul c este funcție liniară de λ, constă în următoarele:

a) se determină o bază optimă B pentru o valoare particulară $\lambda = \lambda_0$ a parametrului, folosind unul dintre algoritmele simplex sau se arată că nu există soluție optimă pentru nici o valoare a parametrului;

b) dacă B există se calculează diferențele $z_j - c_j$ în baza B pentru $c = c^{(0)} + \lambda_0 c^{(1)} + \lambda c^{(1)}$, unde $c^{(0)} + \lambda_0 c^{(1)}$ este un vector constant;

c) se determină intervalul de optimalitate a bazei B, calculînd valorile $\underline{\lambda}$ și $\overline{\lambda}$ cu formulele (III.3.9) și (III.3.10);

d) dacă $\overline{\lambda}$ sau $\underline{\lambda}$ este finit se cunoaște baza optimă pentru o nouă valoare a parametrului și se reia aplicarea algoritmului de la punctul b). Dacă și $\overline{\lambda}$ și $\underline{\lambda}$ sînt valori finite se calculează $z_j - c_j$, atît pentru $c^{(0)} + \underline{\lambda} c^{(1)} + \lambda c^{(1)}$, cît și pentru $c^{(0)} + \overline{\lambda} c^{(1)} + \lambda c^{(1)}$.

Algoritmul se încheie atunci cînd se împarte toată axa reală în intervale de optimalitate sau cînd se arată că, dincolo de anumite valori ale parametrului, problema nu mai are soluții optime finite. Numărul valorilor critice, deci și al intervalelor în care se împarte intervalul de variații al parametrului, este finit fiindcă numărul bazelor în problemele de programare este finit.

4. Interpretarea geometrică

Pentru interpretarea geometrică a problemei de programare în care vectorul c este funcție liniară de un parametru, ne situăm în spațiul R_2. Se știe că mulțimea soluțiilor nenegative ale unui sistem de inecuații cu două variabile este un domeniu convex și că funcția obiectiv se reprezintă grafic printr-o familie de drepte normale pe vectorul c.

Scanned with OKEN Scanner

În fig. 5 dreptele D_i $(i = 1, \ldots, 6)$ limitează semiplanele în care sînt satisfăcute restricțiile problemei. Aceste semiplane sînt indicate prin săgeți. Intersecția lor, cuprinsă în cadranul nenegativ, este poligonul convex $ABCDE$. Cînd λ variază de la 0 la $+\infty$, vectorul $c = c^{(0)} + \lambda c^{(1)}$ este un element al conului definit de $c^{(0)}$ și $c^{(1)}$.

Pentru $\lambda = 0$; $c \equiv c^{(0)}$ și pentru $\lambda = +\infty$, $c \equiv c^{(1)}$. Funcția $x_1 = c^{(0)} x_2$ este reprezentată în fig. 5 prin linia punctată z; $\max z =$

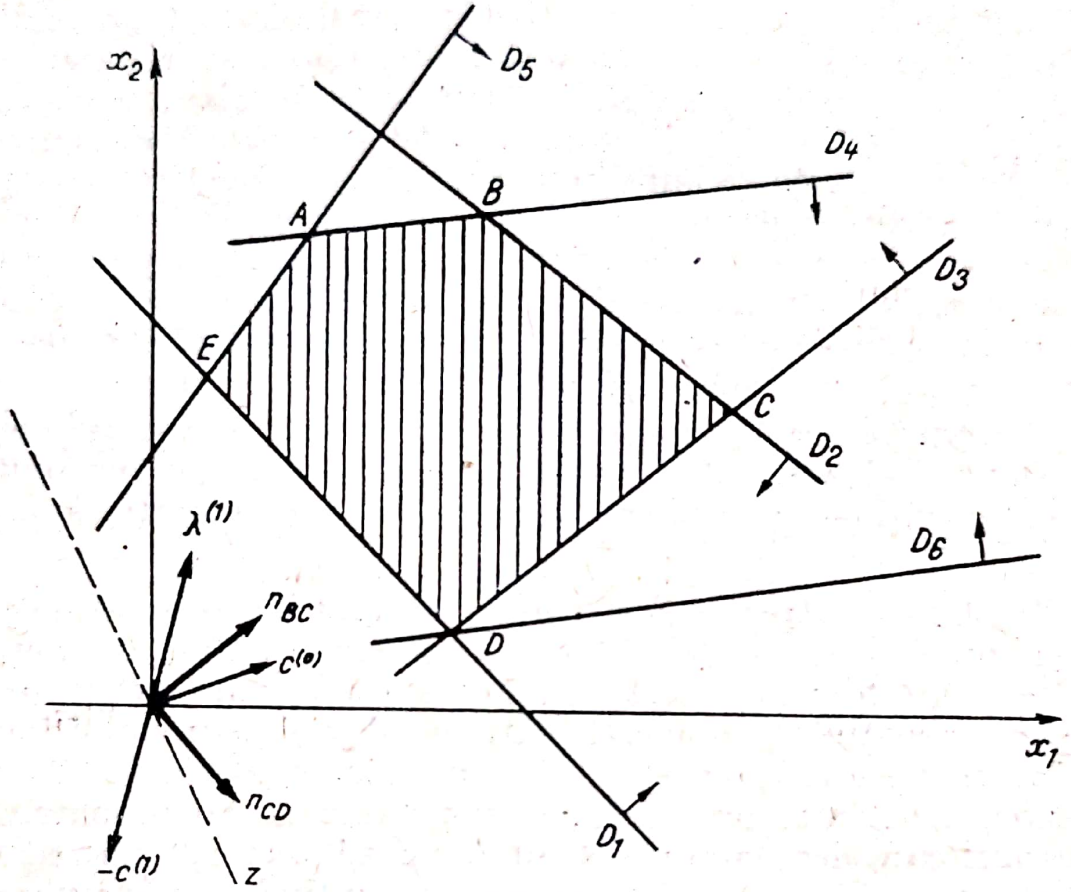


Fig. 5

$= c^{(0)} x$ este dreapta care trece prin vîrful C al poligonului soluțiilor realizabile. Cînd λ crește începînd de la 0, există o valoare λ_1 pentru care vectorul $c^{(0)} + \lambda_1 c^{(1)}$ devine normal pe dreapta CB și atunci dreapta $z_{\max}$ coincide cu BC. Deci, în timp ce λ crește de la 0 la λ_1, dreapta $z_{\max} = c^{(0)} x$ trece mereu prin vîrful C, executînd o mișcare de rotație în jurul acestui punct, și cînd $\lambda = \lambda_2$ se suprapune laturii BC a poligonului soluțiilor.

Pentru $\lambda = 0$ soluția optimă este dată de coordonatele punctului C. Această soluție rămîne optimă pentru $0 \leqslant \lambda < \lambda_1$, dar pentru $\lambda = \lambda_1$ avem două soluții optime constituite din coordonatele punctelor C și B. Pentru $\lambda > \lambda_2$ baza optimă B rămîne unică pînă cînd vectorul

$c = c^{(0)} + \lambda_1 c^{(1)} + \theta c^{(1)}$ devine normal pe dreapta AB. Este evident că există o singură poziție în care vectorul c este normal pe AB, deci o singură valoare $\lambda_2 = \lambda_1 + 0$ pentru care coordonatele vîrfurilor A și B sînt componentele soluțiilor optime. Dacă $\lambda > \lambda_2$, dreapta $z_{max} = c^{(0)}x$ se rotește în jurul punctului A, care rămîne optim pentru toate valorile parametrului superioare lui λ_2.

Să studiem acum pozițiile dreptei $z_{max} = c^{(0)}x$ cînd λ descreşte de la 0 la $-\infty$. Vectorul c este acum un element al conului definit de $c^{(0)}$ și $-c^{(1)}$, deci $z_{max} = c^{(0)}x$ se rotește în jurul punctului C în direcția laturii CD și există o valoare λ_1' a parametrului pentru care vectorul $c^{(0)} + \lambda_1' c^{(1)}$ este normal pe CD. Pentru această valoare coordonatele punctelor C și D sînt soluții optime. Cînd λ continuă să descrească, $z_{max} = c^{(0)}x$ se rotește în jurul punctului D și coincide cu CD pentru o anumită valoare a parametrului, dar soluția optimă rămîne unică. Cînd $\lambda = -\infty$, $c \equiv -c^{(1)}$, dar nici o dreaptă normală pe această direcție nu trece printr-un vîrf al poligonului soluțiilor, deci problema nu are soluții optime pe toată mulțimea valorilor reale ale parametrului.

Din cele arătate se desprind următoarele observații:

1°. Variația continuă a vectorului c imprimă o variație continuă valorii funcției obiectiv, dar soluția optimă variază discontinuu. Fiecare soluție optimă corespunde unui interval de variație a parametrului.

2°. Un punct extrem a polihedronului soluțiilor este optim pentru orice vector c care este un element al conului definit de normalele la dreptele care formează acel vîrf. Această observație se poate generaliza pentru spațiul R_n. Punctele extreme ale polihedronului soluțiilor realizabile în R_n sînt intersecții a n hiperplane. Normalele la aceste hiperplane, construite prin originea sistemului de coordonate, determină conuri care descompun spațiul R_n. Cînd vectorul c aparține conului asociat unui punct extrem, soluția optimă are componentele egale cu coordonatele acestui punct.

Exemplul I. Să se determine soluțiile optime ale problemei

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 &\leqslant 12 \\
x_1 + x_4 &\leqslant 5 \\
2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_5 &\leqslant 20 \\
x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 &\leqslant 10 \\
-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &\leqslant 24 \\
x_i \geqslant 0 \qquad i = 1, \ldots, 5;
\end{aligned} \tag{III.3.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\max z = (-2 + 9\lambda)x_1 + (-3 + 2\lambda)x_2 + (2 - 3\lambda)x_4 + (3 - \lambda)x_5$$

$$\text{pentru } -\infty < \lambda < +\infty.$$

După adăugarea variabilelor de abatere care transformă sistemul de restricții (III.3.14) într-un sistem de ecuații, se scrie tabelul coeficienților modelului sub forma utilizată în metoda simplex revizuită. Vom scrie acest tabel pentru funcția z în care $\lambda = 0$.

Tabela coeficienților pentru $\lambda = 0$

(81)

Ecuația	Variabile de structură					Variabile de abatere					z	Constante
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}		
1	2	−1	1	0	0	1						12
2	1	0	0	1	0		1					5
3	2	2	1	0	−2			1				20
4	1	−1	−2	2	−2				1			10
5	−2	2	−2	−2	1					1		24
z	2	3	0	−2	−3						1	0

În acest exemplu nu se folosește ecuația w, fiindcă toate variabilele adăugate sînt variabile de abatere, deci nu este necesară excluderea lor din bază. Soluția optimă se obține după trei iterații. Bazele folosite în aceste iterații sînt:

— în iterația 0 baza formată din vectorii $a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$;

— în iterația 1 baza formată din vectorii a_6, a_7, a_8, a_9, a_5;

— în iterația 2 baza formată din vectorii a_6, a_4, a_8, a_9, a_5;

— în iterația 3 baza formată din vectorii a_3, a_4, a_8, a_9, a_5.

Scanned with OKEN Scanner

Inversa bazei optime, soluția asociată acestei baze și factorii relativi de cost în iterațiile 1—3 sînt:

Inversa bazei optime B_3 pentru $\lambda = 0$

(82)

Variabile din bază	Inversa bazei					z	Constante	$x_s = x_1$
	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}			
x_3	1	0			0		12	2
x_4	0	1			0		5	1*
x_8	3	4	1		2		124	8
x_9	6	2		1	2		140	11
x_5	2	2			1		58	4
z	6	8	0	0	3	1	184	0

Factorii relativi de cost pentru $\lambda = 0$

(83)

Iterația	Variabile									
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0	2	3	0	−2	−3*	0	0	0	0	0
1	−4	9	−6	−8*	0	0	0	0	0	3
2	4	9	−6*	0	0	0	8	0	0	3
3	16	3	0	0	0	6	8	0	0	3

Factorii relativi de cost pentru $\lambda = 0$ în baza optimă sînt:

$$\bar{c}_1 = 16 - 16\lambda; \quad \bar{c}_2 = 3 - 2\lambda; \quad \bar{c}_3 = \bar{c}_4 = \bar{c}_5 = 0; \quad \bar{c}_6 = 6 - 2\lambda;$$

$$\bar{c}_7 = 8 - 5\lambda; \quad \bar{c}_8 = \bar{c}_9 = 0; \quad \bar{c}_{10} = 3 - \lambda \text{ și } z = 184 - 73\lambda.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea intervalului în care această bază rămîne optimă cînd λ variază, observăm că toți β_j sînt negativi, deci $\lambda = -\infty$, iar

$$\bar{\lambda} = \min_{\beta_j<0}\left(-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right) = \min\ (16/16\,;\ 3/2\,;\ 6/2\,;\ 8/5\,;\ 3/1) = 16/16 = 1.$$

Prin urmare, baza iterației 3, B_3, este optimă pentru toate valorile parametrului $-\infty < \lambda \leqslant 1$. Dacă $\lambda = 1$, $\bar{c}_1 = 0$, deci a_1 intră în bază. Componentele vectorului a_1 în B_3 sînt (2, 1, 8, 11, 4), a_1 înlocuiește pe a_4, iar inversa bazei B_4 $(a_3, a_1, a_8, a_9, a_5)$ este:

Inversa bazei B_4 pentru $\lambda = 1$

(84)

Variabile din bază	Inversa bazei					7	Constante	$x_5 = x_2$
	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}			
x_3	1	−2					2	−1
x_1	0	1					5	0
x_8	3	−4	1				84	3*
x_9	6	−9		1			85	−3
x_5	2	−2			1		38	0
z	4	3	0	0	2	1	111	0

Soluțiile asociate bazelor B_3 și B_4 sînt optime pentru $\lambda = 1$, iar valoarea funcției obiectiv, pentru ambele soluții, este $z = 111$. Se calculează factorii relativi de cost în baza B_4 — vezi tabelul factorilor relativi de cost (86) — pentru $c = c^{(0)} + \lambda c^{(1)}$. Determinăm intervalul în care B_4 este optimă, calculînd:

$$\lambda = \max_{\beta_j>0}\left[\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right] = \max\ (16/16\,;\ 8/11) = 16/16 = 1,$$

$$\bar{\lambda} = \min_{\beta_j<0}\left[-\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right] = \min\ (3/2\,;\ 6/2\,;\ 3/1) = 3/2.$$

Deci, B_4 este optimă pentru $1 \leqslant \lambda \leqslant 3/2$, dacă $\lambda = 3/2$ $c_2 = 0$. Calculăm a_2 în baza B_4 și găsim componentele $(-1\,;\ 0{,}3\,;\ -3\,;\ 0)$. Inversa bazei B_5 $(a_3,\ a_1,\ a_2,\ a_9,\ a_5)$ este:

Inversa bazei B_5 pentru $\lambda = 3/2$

(85)

x_3	2	$-10/3$	$1/3$		$2/3$	30
x_1	0	0	0		0	5
x_2	1	$1/3$	$1/3$		$2/3$	28
x_9	9	1	1	1	4	169
x_5	2	0	0		1	38
z	3	$17/2$	0	0	3	1	$114\frac{1}{2}$

Factorii relativi de cost pentru $c = c^{(0)} + \lambda c^{(1)}$

(86)

Baza	Variabile										z	Interval de optimalitate
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}		
B_3	$16-16\lambda$	$3-2\lambda$	0	0	0	$6-2\lambda$	$8-5\lambda$	0	0	$3-\lambda$	$184-73\lambda$	$(-\infty, 1]$
	0*	1	0	0	0	4	3	0	0	2	111	$\lambda = 1$
B_4	0	$3-2\lambda$	0	$-16+16\lambda$	0	$6-2\lambda$	$-8+11\lambda$	0	0	$3-\lambda$	$104+7\lambda$	$[1, 3/2]$
	0	0*	0	8	0	3	$17/2$	0	0	$3/2$	$114\frac{1}{2}$	$\lambda = 3/2$
B_5	0	0	0	$-6+\frac{32}{3}\lambda$	0	3	$4+\frac{25}{3}\lambda$	$-1+\frac{2}{3}\lambda$	0	$1+\frac{1}{3}\lambda$	$20+63\lambda$	$[3/2, +\infty)$

Pentru B_5 avem

$$\bar{\lambda} = \max_{\beta_j > 0}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right) = \max\,(18/32\,;\ -12/25\,;\ 3/2;\ -3) = 3/2\,;$$

$\bar{\lambda} = +\infty$ deoarece toți β_j sînt pozitivi, deci B_5 este optimă pentru toate valorile parametrului mai mari decît $3/2$.

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceasta se încheie studiul exemplului analizat. În concluzie:

— problema admite cel puţin o soluţie optimă pentru orice valoare reală a parametrului;

— valorile critice sînt $\lambda_1 = 1$ şi $\lambda_2 = 3/2$. Pentru fiecare din aceste valori există două soluţii optime de bază şi o infinitate de soluţii optime care se găsesc prin combinaţii liniare convexe între soluţiile optime de bază.

5. Determinarea valorilor critice prin algoritmul primal-dual

În cele ce urmează se va arăta [46] că algoritmul de programare parametrică expus în cadrul punctului 3 din acest paragraf este echivalent cu algoritmul simplex primal-dual. Pentru aceasta să considerăm problemele duale

$$(P)\ \begin{cases} Ax = d \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \\ \max z = (c^{(0)} + \lambda c^{(1)})x \end{cases} \qquad (D)\ \begin{cases} uA \geqslant c^{(0)} + \lambda c^{(1)} \\ \min v = ud \end{cases} \qquad \text{(III.3.15)}$$

În cadrul punctului 2 al acestui paragraf s-a arătat că se poate determina o bază optimă B a problemei (P) pentru $\lambda = 0$ şi că această bază îşi păstrează caracterul de optimalitate pentru $\underline{\lambda} \leqslant \lambda \leqslant \overline{\lambda}$, unde $\underline{\lambda}$ şi $\overline{\lambda}$ sînt valorile definite de (III. 3.9) şi (III.3.10). Să presupunem că $\underline{\lambda}$ este finit. Soluţia optimă a problemei duale (D) pentru $\lambda = \underline{\lambda}$ este

$$\underline{u} = (c_B^{(0)} + \underline{\lambda} c_B^{(1)})B^{-1}. \qquad \text{(III.3.16)}$$

Fie S mulţimea indicilor j definită astfel:

$$S = \{j \mid \underline{u}\, a_j = c_j^{(0)} + \underline{\lambda}\, c_j^{(1)};\ 1 \leqslant j \leqslant n\}. \qquad \text{(III.3.17)}$$

Este uşor de văzut că $S \supseteq I$, I fiind mulţimea indicilor vectorilor care formează baza B.

Folosind definiţia mulţimii S se demonstrează:

Teorema I: Condiţia necesară şi suficientă pentru ca $\underline{\lambda} < \overline{\lambda}$ este ca $\beta_j \geqslant 0$ pentru toţi $j \in S$.

Demonstraţia teoremei directe: Se admite că $\beta_j \geqslant 0$ pentru $j \in S$ şi trebuie arătat că $\underline{\lambda} < \overline{\lambda}$. Putem presupune:

a) mulţimea S include toţi vectorii matricei A; în acest caz, din definiţia (III. 3. 10) rezultă $\overline{\lambda} = +\infty$, deci $\underline{\lambda} < \overline{\lambda}$;

b) matricea A conţine şi vectori a_j de indici $j \notin S$. Fie

$$J = \{g \mid \beta_j < 0;\ j \notin S\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece B este o bază optimă, $z_j - c_j > 0$ pentru toți $j \notin S$. Pentru faptul că $z_j = c_B B^{-1} a_j$, condiția de nenegativitate a factorilor relativi de cost se scrie

$$ua_j > c_j^{(0)} + \underline{\lambda} c_j^{(1)}.$$

Înlocuind în această condiție u cu valoarea dată prin egalitatea (III. 3. 16), scriem

$$(c_B^{(0)} + \underline{\lambda} c_B^{(1)}) B^{-1} a_j > c_j^{(0)} + \underline{\lambda} c_j^{(1)}; \quad j \in J. \tag{III.3.18}$$

Din relația (III.3.18) rezolvată în raport cu $\underline{\lambda}$ avem:

$$\lambda < -\frac{c_B^{(0)} B^{-1} a_j - c_j^{(0)}}{c_B^{(1)} B^{-1} a_j - c_j^{(1)}} = -\frac{\alpha_j}{\beta_j}, \tag{III.3.19}$$

astfel încît din inegalitatea (III.3.19) rezultă că $\underline{\lambda} < \overline{\lambda}$ cînd $\beta_j < 0$, pentru orice $j \in S$.

Demonstrația teoremei reciproce. Știind că $\underline{\lambda} < \overline{\lambda}$, trebuie arătat că $\beta_j \geqslant 0$ pentru toți $j \in S$. Să presupunem că această concluzie nu este adevărată, deci că există un $\beta_k < 0$ pentru un indice $k \in S$. Deoarece $q \in S$, trebuie să avem $z_q - c_q = 0$, adică

$$(c_B^{(0)} + \underline{\lambda} c_B^{(1)}) B^{-1} a_q = c_q^{(0)} + \underline{\lambda} c_q^{(1)}.$$

Din această egalitate, rezolvată în raport cu $\underline{\lambda}$, se obține

$$\underline{\lambda} = -\frac{c_B^{(0)} B^{-1} a_q - c_q^{(0)}}{c_B^{(1)} B^{-1} a_q - c_q^{(1)}} = -\frac{\alpha_q}{\beta_q} = \lambda.$$

Rezultatul găsit, presupunînd că există un $B_k < 0$ pentru $k \in S$, contrazice ipoteza $\underline{\lambda} < \overline{\lambda}$, deci demonstrează teorema reciprocă. Din teorema I rezultă următorul:

Corolar. Condiția necesară și suficientă pentru ca $\underline{\lambda} < \overline{\lambda}$ este ca B să fie o bază optimă pentru problemele primală restrînsă și duala ei, cu următorul model:

$$(P.R) \begin{cases} \sum_{j \in S} x_j a_j = d \\ x_j \geqslant 0 \\ \max \xi = \sum_{j \in S} c_j^{(1)} x_j \end{cases} \qquad (D.R) \begin{cases} \nu a_j \geqslant c_j^{(1)}; \quad j \in S \\ \min \eta_l = \nu d \end{cases}$$

Din cele stabilite la punctul 2 al acestui paragraf şi din interpretarea geometrică a algoritmului de programare parametrică s-a văzut că soluţia optimă a problemei (P) pentru toate valorile parametrului λ cuprinse între $\underline{\lambda}$ şi $\bar{\lambda}$ este unică. Aceeaşi afirmaţie este valabilă şi pentru soluţia optimă a problemei duale (D) şi a dualei restrînse $(D.R)$, cînd $\underline{\lambda} < \lambda < \bar{\lambda}$. Relaţia dintre soluţiile optime ale problemei (D) pentru $\lambda = \underline{\lambda}$ şi $\lambda = \bar{\lambda}$ este dată de următoarea teoremă:

T e o r e m a II. Dacă $\underline{u} = (c_B^{(0)} + \underline{\lambda} c_B^{(1)}) B^{-1}$ este soluţia optimă a problemei duale (D) pentru $\lambda = \underline{\lambda}$, iar $\underline{\nu} = c_B^{(1)} B^{-1}$ este soluţia optimă a dualei restrînse $(D.R)$ asociată bazei B, atunci

$$\bar{u} = \underline{u} + \theta \nu, \tag{III.3.20}$$

unde $\theta = \lambda - \underline{\lambda}$ este soluţia optimă a problemei (D) pentru $\lambda = \bar{\lambda}$.

Demonstraţie. $\underline{u}$ este prin ipoteză soluţia problemei (D) pentru $\lambda = \underline{\lambda}$, deci

$$\underline{u} a_j \leqslant c_j^{(0)} + \underline{\lambda} c_j^{(1)}. \tag{III.3.21}$$

De asemenea, $\underline{\nu}$ fiind o soluţie pentru $(D.R)$, avem

$$\underline{\nu} a_j \leqslant c_j^{(1)}; \quad j \in S. \tag{III.3.22}$$

Înmulţind (III. 3.22) cu un scalar $\theta > 0$ şi adunînd cu (III.3.21), avem

$$(\underline{u} + \theta \underline{\nu}) a_j \leqslant c_j^{(0)} + (\underline{\lambda} + \theta) c_j^{(1)}. \tag{III.3.23}$$

Condiţiile (III.3.23) sînt satisfăcute pentru $0 < \theta < \theta_0$ dacă:

$$\theta_0 = \min_{\beta_j < 0} \left[- \frac{\underline{u} a_j - c_j^{(0)} - \underline{\lambda} c_j^{(1)}}{\underline{\nu} a_j - c_j^{(1)}} \right] =$$

$$= \min_{\beta_j < 0} \left[- \frac{(c_B^{(0)} B^{-1} a_j - c_j^{(0)}) + \underline{\lambda} (c_B^{(1)} B^{-1} a_j - c_j^{(1)})}{c_B^{(1)} B^{-1} a_j - c_j^{(1)}} \right],$$

deci

$$\theta_0 = \min_{\beta_j < 0} \left[- \frac{\alpha_j + \underline{\lambda} \beta_j}{\beta_j} \right] = \bar{\lambda} - \underline{\lambda}. \tag{III.3.24}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta dovedește că $\bar{u} = u + \theta \underline{v}$ este o soluție a problemei (D) pentru $\theta = \bar{\lambda} - \underline{\lambda}$. Rămîne de văzut pentru care valoare a parametrului λ, vectorul $\bar{u}$ este o soluție a problemei (D).

În acest scop se scrie:

$$\bar{u} = u + (\bar{\lambda} - \underline{\lambda})\underline{v} = (c_B^{(0)} + \underline{\lambda} c_B^{(1)})B^{-1} + (\bar{\lambda} - \underline{\lambda})c_B^{(1)}B^{-1} = \\ = (c_B^{(0)} + \bar{\lambda} c_B^{(1)})B^{-1},$$

ceea ce arată că $\bar{u}$ corespunde valorii $\lambda = \bar{\lambda}$ a parametrului. Să arătăm acum că $\bar{u}$ este soluție optimă pentru (D). Se știe că funcțiile obiectiv a două probleme duale iau aceeași valoare pentru soluția optimă, deci optimalitatea soluției $\bar{u}$ se dovedește arătînd că

$$\min v(\bar{\lambda}) = \max z(\bar{\lambda}).$$

În adevăr,

$$\min v(\bar{\lambda}) = \bar{u}d = (c_B^{(0)} + \bar{\lambda} c_B^{(1)})B^{-1}d = \max z(\bar{\lambda}).$$

Cu aceste rezultate se poate formula algoritmul primal-dual echivalent cu algoritmul de programare parametrică, pentru cazul în care c este funcție liniară de λ. Acest algoritm constă în următoarele:

— Se determină o soluție optimă $\underline{u}$ a problemei duale pentru $\lambda = \underline{\lambda}$. Această soluție determină mulțimea S definită de (III.3.17) și dă posibilitatea construirii problemei primale $(P.R.)$ și dualei restrînse $(D.R.)$

— Folosind metoda simplex revizuită se găsesc soluțiile optime pentru $(P.R.)$ și $(D.R.)$. Din teorema I rezultă că orice soluție optimă pentru $(D.R.)$ este o soluție optimă si a problemei (P) pentru $\lambda = \underline{\lambda}$. Notînd cu $\underline{v}$ soluția optimă a $(D.R.)$ pentru $\lambda = \underline{\lambda}$ se determină θ_0 cu ajutorul relației (III.3.24). Se construiește $u = \underline{u} + \theta_0 \underline{v}$ care este soluția optimă a lui (D) pentru $\bar{\lambda} = \lambda + \theta_0$.

— Procesul se repetă pînă cînd $\beta_j \geqslant 0$, pentru orice j. Cînd s-a ajuns la acest rezultat studiul problemei se încheie, fiindcă (D) nu mai are soluții optime finite pentru nici o valoare a parametrului mai mare decît ultimul $\bar{\lambda}$ determinat. Ultima valoare pentru $\bar{\lambda}$ poate fi $+\infty$.

La punctul următor se va rezolva o problemă de programare parametrică prin ambele metode expuse — algoritmul propriu și algoritmul primal-dual — cu scopul de a compara aceste procedee. Pentru ca în același timp să stabilim legătura cu problemele parametrice care se întîlnesc în practică se va formula o problemă de acest tip și se va rezolva un model redus care nu necesită calcule prea laborioase.

Scanned with OKEN Scanner

6. Problema determinării nivelului optim al producției

Este știut că, pentru cele mai multe produse, cererea în diferite perioade nu rămîne constantă. În unele cazuri nivelul cererii poate fi prevăzut cu un grad oarecare de precizie. Presupunînd că cererea este determinată, dar diferită de la o perioadă la alta, este dificil ca producția să se adapteze cererii, deoarece acest lucru ar impune o fluctuație în folosirea utilajului și a forței de muncă. În perioadele în care producția depășește cererea, la cheltuielile de producție se adaugă cheltuielile de stocaj. În perioadele în care producția nu poate satisface cererea se înregistrează pierderi în volumul circulației mărfurilor.

Problema determinării nivelului optim al producției constă în găsirea unei soluții care să combine dezavantajele, în așa fel încît fluctuația inevitabilă a cererii să fie suportată cu minimum de pierderi. Soluția va trebui să stabilească ritmul producției în diferite perioade. Pentru formularea problemei vom folosi următoarele notații:

s_0 = stocul inițial;

s_i = stocul la sfîrșitul perioadei i;

x_j = nivelul (volumul) producției în perioada j;

$X_i = \sum_{j=1}^{i} x_j$ = totalul producției în primele i perioade;

c_j = cererea în perioada j;

$C_j = \sum_{j=1}^{i} c_i$ = totalul cererilor în primele i perioade;

a = costul stocajului unei unități de produs în decursul unei perioade;

b = costul pe unitatea de produs realizat peste un nivel dat.

Condiția ca cererea de produse să fie satisfăcută în orice perioadă se exprimă folosind notațiile adoptate, sub forma

$$s_0 + X_i - C_i \geqslant 0; \qquad i = 1, \ldots, n$$

sau sub forma echivalentă

$$s_0 + X_i - C_i - s_i = 0; \qquad i = 1, \ldots, n. \qquad \text{(III.3.25)}$$

Este interesant de observat că variabilele s_i apar în aceste restricții, pe de o parte, ca variabile de structură și pe de altă parte ca variabile artificiale, deoarece ele transformă inecuațiile în ecuații.

Funcția obiectiv are două părți componente: una referitoare la costul stocărilor necesare și alta la costul legat de creșterea producției peste un nivel determinat. Prima parte a acestei funcții se construiește cu ușurință. Admițînd că cererea este aproximativ constantă în decursul unei anumite perioade, stocul în decursul acelei perioade

Scanned with OKEN Scanner

este $1/2(s_{i-1} + s_i)$ și deci costul stocajului în perioada i este $1/2a(s_{i-1} + s_i)$; pentru costul total de stocaj în n perioade avem

$$\frac{1}{2} a \sum_{i=1}^{n} (s_{i-1} + s_i) = a(1/2s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1} + 1/2s_n).$$

Pentru a exprima a doua parte a funcției obiectiv, cunoașterea nivelului peste care creșterea producției cu o unitate implică cheltuieli suplimentare este o necesitate, dar tocmai acest „nivel" trebuie determinat. Această dificultate se înlătură definind diferența dintre volumul producției din două perioade consecutive, astfel:

$$x_j - x_{j-1} = u_j - v_j,$$

unde $u_j \geqslant 0$ și $v_j \geqslant 0$ și $u_j = 0$ dacă $v_j > 0$ și $v_j = 0$ dacă $u_j > 0$. Este ușor de observat că $u_j = 0$, cînd $v_j > 0$, înseamnă că nivelul producției în perioada j este mai scăzut decît în cea precedentă; $v_j = 0$, cînd $u_j > 0$, indică situația contrară și $u_j = v_j = 0$ arată că nivelul producției în cele două perioade rămîne constant. Cu alte cuvinte, $v_j \neq 0$ arată o descreștere și $u_j \neq 0$ o creștere a producției în perioada j față de cea precedentă. În felul acesta, a doua parte a funcției obiectiv este

$$b \sum_{j=1}^{n} u_j.$$

Revenim asupra condițiilor impuse variabilelor u_j și v_j. Condițiile de nenegativitate impuse acestor variabile nu complică modelul, deoarece variabilele în problemele de programare sînt de obicei nenegative. Condiția ca una dintre aceste variabile să se anuleze cînd cealaltă ia o valoare pozitivă nu trebuie inclusă explicit în restricțiile modelului. În adevăr, toate relațiile care conțin una din aceste variabile conțin și pe cealaltă cu aceiași coeficienți, deci vectorii asociați lor sînt identici. Acest fapt ne asigură că, dacă o bază va conține vectorul asociat uneia dintre ele, nu va putea conține și vectorul asociat celeilalte, știut fiind că vectorii unei baze sînt liniar independenți. De aici reiese că dacă u_j este variabilă din bază, deci ia o valoare pozitivă, v_j nu aparține bazei, deci are valoare nulă și invers.

Din cele stabilite urmează că modelul matematic al problemei este

$$\min f(U, S) = \frac{1}{2} a \sum_{i=1}^{n} (s_i + s_{i-1}) + b \sum_{j=1}^{n} u_j, \qquad \text{(III.3.26)}$$

cu condițiile

$$s_0 + \sum_{j=1}^{i} (x_j - c_j) - s_i = 0; \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{(III.3.27)}$$

$$x_j - x_{j-1} - u_j + v_j = 0; \qquad j = 1, \ldots, n \qquad \text{(III.3.28)}$$

Scanned with OKEN Scanner

și

$$x_j, s_i, u_j, v_j \geqslant 0; \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Se admite că se cunosc: cererile c_j pentru fiecare perioadă; stocul inițial s_0 și x_0 nivelul producției din perioada imediat anterioară primei perioade care intră în studiu. Dacă n este numărul de perioade de care se ocupă problema, modelul conține $4n$ variabile și $2n$ restricții. De exemplu, planificarea pentru un an în care perioada este de o lună ar cere un model cu 48 variabile și 24 restricții. Gass [34] a construit o variantă a acestui model, care prezintă avantajul de a reduce atît numărul variabilelor, cît și al restricțiilor. Modelul dat de Gass se deduce din cel stabilit mai înainte în modul următor.

Prima ecuație din (III.3.27) se lasă nemodificată; celelalte se înlocuiesc prin diferența dintre fiecare ecuație i și precedenta ei $(i-1)$. Sistemul (III.3.27) se înlocuiește în acest fel cu sistemul

$$s_{j-1} + x_j - c_j = s_j; \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{III.3.29}$$

Fiecare relație din (III.3.29) arată că stocul la sfîrșitul perioadei j este egal cu stocul la sfîrșitul perioadei $(j-1)$, la care se adaugă producția din perioada j și din care se scade consumul din aceeași perioadă. Aceste condiții logice pot fi scrise și direct din datele problemei. În continuare, sistemul (III.3.29) se înlocuiește cu un sistem care conține o ecuație mai puțin, format prin scăderea fiecarei ecuații din precedenta. Avem

$$s_{j-1} - s_j + x_j - x_{j+1} - c_j + c_{j+1} = s_j - s_{j+1}; \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{III.3.30}$$

În (III.3.30) diferențele $x_j - x_{j-1}$ se înlocuiesc cu valorile lor deduse din ecuațiile (III.3.28) și astfel sistemul devine

$$s_{j-1} - 2s_j + s_{j+1} - u_{j+1} + v_{j+1} = c_j - c_{j+1}; \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{III.3.31}$$

Se mai adaugă acestui sistem prima ecuație din (III.3.29), în care x_1 este înlocuit cu expresia $x_1 = x_0 + u_1 - v_1$ rezultată din prima ecuație a sistemului (III.3.28). Se obține

$$s_0 + x_0 + u_1 - v_1 - c_1 = s_1.$$

În urma modificărilor făcute, modelul problemei este

$$\begin{gathered}
\min f(U, S) = 1/2a \sum_{j=1}^{n} (s_{j-1} + s_j) + b \sum_{j=1}^{n} u_j; \\
s_1 - u_1 + v_1 = s_0 + x_0 - c_1, \\
-2s_1 + s_2 - u_2 + v_2 = -s_0 + c_1 - c_2, \\
s_{j-2} - 2s_{j-1} + s_j - u_j + v_j = c_{j-1} - c_j; \qquad j = 3, \ldots, n, \\
s_j, u_j, v_j \geqslant 0; \qquad j = 1, \ldots, n.
\end{gathered} \tag{III.3.32}$$

Scanned with OKEN Scanner

In formularea din (III.3.32) modelul conţine numai n restricţii şi $3n$ variabile. În plus, (III.3.32) posedă un avantaj foarte important şi anume acela de a conţine două matrice unitare care dau posibilitatea de a dispune de o soluţie realizabilă de bază fără introducerea altor variabile.

Funcţia obiectiv a acestei probleme include doi parametri :

1) costul stocajului unei unităţi de produs în decursul unei perioade ;

2) costul pe unitatea de produs realizat peste un nivel dat.

Deoarece a este cu certitudine un număr pozitiv, $f(U, S)$ se poate împărţi prin a şi noua funcţie obiectiv $f'(U, S)$ conţine un singur parametru şi este minimă o dată cu $f(U, S)$. În această formă avem de rezolvat o problemă de programare parametrică care ne dă posibilitatea de a studia felul în care variază costul minim pentru diferitele valori ale parametrului $\lambda = \frac{b}{a}$. De aici se poate vedea care din cele două costuri a sau b ar trebui să fie reduse, în scopul obţinerii economiilor maxime. Pentru exemplificare să ne ocupăm de planificarea producţiei pe un an, împărţit în patru trimestre, în care cererile sînt :

Trimestrul	I	II	III	IV
Cerere	20	50	60	10

Se ştie de asemenea că stocul iniţial este $s_0 = 10$ (mai mic decît cererea din primul trimestru) şi că producţia prevăzută este $x_0 = 30$. Folosind modelul (III.3.32) se obţine următoarea formulare a problemei : să se minimizeze funcţia

$$f'(U, S) = 5 + s_1 + s_2 + s_3 + 1/2s_4 + \lambda(u_1 + u_2 + u_3 + u_4), \tag{III.3.33}$$

cu condiţiile

$$\begin{aligned}
s_1 - u_1 + v_1 &= 20,\\
-2s_1 + s_2 - u_2 + v_2 &= -40,\\
s_1 - 2s_2 + s_3 - u_3 + v_3 &= -10,\\
s_2 - 2s_3 + s_4 - u_4 + v_4 &= 50,\\
s_j,\ u_j,\ v_j \geqslant 0 ; \quad j &= 1, \ldots, 4.
\end{aligned} \tag{III.3.34}$$

O soluţie realizabilă de bază a sistemului (III.3.34) este evident

$$v_1 = 20 ;\ u_2 = 40 ;\ u_3 = 10 ;\ v_4 = 50$$

şi poate fi folosită ca soluţie iniţială în algoritmul simplex

Scanned with OKEN Scanner

	γ_B ↓	Baza	γ_j	1	1	1	1/2	λ	λ	λ	λ	0	0	0	0	Const.
				s_1	s_2	s_3	s_4	u_1	u_2	u_3	u_4	v_1	v_2	v_3	v_4	
B_1	0	$\leftarrow v_1$		1*				−1				1				20
	λ	u_2		2	−1				1				−1			40
	λ	u_3		−1	2	−1				1				−1		10
	0	v_4			1	−2	1				−1				1	50
		$f_j - \gamma_j$		λ	λ	$-\lambda$		$-\lambda$	0	0	$-\lambda$	0	$-\lambda$	$-\lambda$	0	50λ
				−1	−1	−1	−1/2									+5
B_2	1	s_1		1				−1				1				20
	λ	u_2			−1			2	1			−2	−1			0
	λ	$\leftarrow u_3$			2*	−1		−1		1		1		−1		30
	0	v_4			1	−2	1				−1				1	50
		$f_j - \gamma_j$		0	λ	$-\lambda$					$-\lambda$	$-\lambda$	$-\lambda$	$-\lambda$	0	30λ
					−1	−1	−1/2	−1	0	0		1				+25
B_3	1	s_1		1				−1				1				20
	λ	u_2				−1/2		3/2*	1	1/2		−3/2	−1	−1/2		15
	1	s_2			1	−1/2		−1/2		1/2		1/2		−1/2		15
	0	$\leftarrow v_4$				−3/2	1	1/2		−1/2	−1	−1/2		1/2	1	35
		$f_j - \gamma_j$				−1/2λ		1/2λ	0	−1/2λ	$-\lambda$	−3/2λ	$-\lambda$	−1/2λ	0	15λ
				0	0	−3/2	−1/2	−3/2		+1/2		+3/2		−1/2		+40
B_4	1	s_1		1		−1/3			2/3	1/3			−2/3	−1/3		30
	λ	u_1				−1/3		1	2/3	1/3		−1	−2/3	−1/3		10
	1	s_2			1	−2/3			1/3	2/3			−1/3	−2/3		20
	0	v_4				−4/3	1		−1/3	−2/3	−1		1/3	2/3	1	30
		$f_j - \gamma_j$				−1/3λ			−1/3λ	−2/3λ	$-\lambda$	$-\lambda$	−2/3λ	−1/3λ	0	10λ
				0	0			0								+45
						−2	−1/2		+1	+1			−1	−1		

Scanned with OKEN Scanner

Baza B_1 este optimă pentru $\lambda = 0$ și rămîne optimă pentru $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Producția organizată în conformitate cu soluția asociată acestei baze este

$$x_1 = x_0 + u_1 - v_1 = 10\,;\ x_2 = x_1 + u_2 - v_2 = 50\,;$$
$$x_3 = x_2 + u_3 - v_3 = 60\,;\ x_4 = x_3 + u_4 - v_4 = 1$$

adică în fiecare trimestru producția este egală cu cererea, cu excepția primului trimestru în care se consumă stocul $s_0 = 10$. Acest rezultat era de așteptat, deoarece λ ia valoarea zero numai dacă $b = 0$, deci producția poate fi sporită pînă la nivelul cererii fără cheltueli suplimentare.

Situația rămîne nemodificată atîta timp cît $\lambda < 1$, adică $b < a$, ceea ce înseamnă că cheltuielile de stocare a produselor sînt mai mari decît cele cerute de sporirea producției.

Dacă $\lambda > 1$, factorii relativi de cost pentru s_1 și s_2 devin pozitivi și dacă hotărîm ca s_1 să intre în bază găsim B_2 optim pe același interval de variație a parametrului; planul de producție este acum $x_1 = 30$; $x_2 = 30$; $x_3 = 60$; $x_4 = 10$, cheltuielile minime fiind $f = 55$ pentru $\lambda = 1$, atît în cazul în care se acceptă soluția asociată bazei B_1, cît și atunci cînd se acceptă soluția dată de B'_2. În B_2, cînd $\lambda = 1$, factorul relativ de cost pentru s_2 este nul deși s_2 nu aparține bazei, deci s_2 poate intra în bază și avem B_3 optim pentru $1 \leqslant \lambda \leqslant 3$. Planul de producție este acum $x_1 = 30$; $x_2 = 45$; $x_3 = 45$; $x_4 = 10$. Cînd $\lambda = 3$, în bază intră u_1 iar B_4 este optimă pentru toate valorile parametrului $\lambda > 3$. Soluția dată de B_4 este $x_1 = 40$; $x_2 = 40$; $x_3 = 40$; $x_4 = 10$. Pentru a compara rezultatele obținute le înregistrăm în tabelul următor:

(88)

Valorile parametrului	Producția				Stocul			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
$\lambda = 0$	10	50	60	10	—	—	—	—
$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$	30	30	60	10	20	—	—	—
$1 \leqslant \lambda \leqslant 3$	30	45	45	10	20	15	—	—
$\lambda \geqslant 3$	40	40	40	10	30	20	—	—

Din acest tabel se vede că pe măsură ce $\lambda = \frac{b}{a}$ crește apar mărfuri în stoc; producția tinde să se apropie de $x_0 = 30$ în primele trei

Scanned with OKEN Scanner

perioade, iar în trimestrul IV rămîne mult sub acest nivel. Dacă în model s-ar introduce şi un parametru care să se refere la pierderile suferite în cazul în care producţia coboară sub un anumit nivel, funcţia obiectiv ar depinde de doi parametri şi planul optim nu ar putea include fluctuaţii importante ale producţiei.

Un astfel de plan ar da indicaţii asupra nivelului optim al producţiei în cadrul unei fluctuaţii cunoscute a cererii şi în anumite condiţii de stocare a produselor.

Vom rezolva acum aceeaşi problemă prin algoritmul primal-dual. Tabelul coeficienţilor pentru iniţierea algoritmului este:

(89)

Baza	Variabile de structură												w	z	Constante
	s_1	s_2	s_3	s_4	v_1	v_2	v_3	v_4	u_1	u_2	u_3	u_4			
v_1	1	0	0	0	1	0	0	0	−1	0	0	0			20
u_2	2	−1	0	0	0	−1	0	0	0	1	0	0			40
u_3	−1	2	−1	0	0	0	−1	0	0	0	1	0			10
v_4	0	1	−2	1	0	0	0	1	0	0	0	−1			50
w	2	2	−3	1	1	−1	−1	1	−1	1	1	−1	1		120
z	−1	−1	−1	−1/2	0	0	0	0	−λ	−λ	−λ	−λ		1	0

Se scrie funcţia

$$z + kw = (1 - 2k)s_1 + (1 - 2k)s_2 + (1 + 3k)s_3 + (1/2 - k)s_4 - kv_1 + + kv_2 + kv_3 - kv_4 + (\lambda + k)u_1 + (\lambda - k)u_2 + (\lambda - k)u_3 + (\lambda + k)u_4.$$

Pentru vectorii care nu aparţin bazei calculăm

$$k = \min_{a_{0j}>0}\left[\frac{-c_j}{a_{0j}}\right] = \frac{1}{2}.$$

În funcţia $z + 1/2w$ variabilele s_1, s_2 şi s_4 au coeficient nul. Problema primală restrînsă conţine variabilele $(v_1, u_2, u_3, v_4; s_1, s_2, s_4)$ şi oricare dintre variabilele s_1, s_2, s_4 poate intra în bază. Se obţin bazele B_2 şi B_3. Coeficienţii funcţiei w în B_3 sînt

	s_1	s_2	s_3	s_4	v_1	v_2	v_3	v_4	u_1	u_2	u_3	u_4
w	0	0	−2	0	−2	−1	0	1	2	1	0	−1

.

Singurul coeficient pozitiv care corespunde unei variabile din bază este 2 pentru u_1, deci noua primală restrînsă conține variabilele $(s_1, u_2, s_2, v_4 ; u_2)$ și iterația următoare conduce la baza B_4 din tabelul simplex.

Prin algoritmul primal-dual s-a ajuns la construirea aceleași baze. Discuția ulterioară este identică.

7. Vectorul c funcție liniară de mai mulți parametri

Să presupunem că funcția obiectiv a unei probleme de programare liniară este

$$\max z = cx \tag{III.3.35}$$

și vectorul c este de forma

$$c = c^{(0)} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c^{(i)}, \tag{III.3.36}$$

unde λ_i ; $i \in P = \{1, \ldots, p\}$ sînt scalari nenegativi, iar $c^{(0)}$ și $c^{(i)}$ sînt numere date. Fie B o bază a problemei propuse. Dacă soluția asociată acestei baze este realizabilă, testul de optimalitate constă în cercetarea factorilor relativi de cost asociați vectorilor care nu aparțin bazei. Dacă

$$\bar{c}_j = c_B B^{-1} a_j - c_j \geqslant 0, \qquad \text{pentru } j \in J$$

soluția este optimă. Pentru vectorul c de forma (III.3.36) avem

$$\bar{c}_j = (c^{(0)} + \sum_{i \in P} \lambda_i c^{(i)})_B B^{-1} a_j - (c^{(0)} + \sum_{i \in P} \lambda_i c^{(i)})_j =$$

$$= (c_B^{(0)} B^{-1} a_j - c_j^{(0)}) + \sum_{i \in P} \lambda_i (c_B^{(i)} B^{-1} a_j - c_j^{(i)}). \tag{III.3.37}$$

Baza B este optimă pentru $\lambda_i \geqslant 0$; $i \in P$, dacă sînt îndeplinite condițiile

$$c_B^{(0)} B^{-1} a_j - c_j^{(0)} \geqslant 0, \text{ pentru toți } j \in J ; \tag{III.3.38}$$

$$c_B^{(i)} B^{-1} a_j - c_j^{(i)} \geqslant 0, \text{ pentru toți } j \in J \text{ și } i \in P. \tag{III.3.39}$$

În ipoteza că pentru B sînt satisfăcute numai condițiile (III.3.38), soluția asociată acestei baze este optimă pentru $\lambda_i = 0$; $i = 1, \ldots, p$. Apoi se pune problema determinării unei noi baze optime pentru $\lambda_i \neq 0$, $i \in P$. Fie $J_1 \subset J$ mulțimea indicilor j pentru care nu sînt

Scanned with OKEN Scanner

îndeplinite condiţiile (III.3.39). Baza B îşi păstrează caracterul de optimalitate pe mulţimea soluţiilor sistemului

$$c_B^{(0)} B^{-1} a_j - c_j^{(0)} + \sum_{i \in P} \lambda_i (c_B^{(i)} B^{-1} a_j - c_j^{(i)}) \geqslant 0, \text{ pentru } j \in J_1. \quad \text{(III.3.40)}$$

Acest sistem conţine s inecuaţii, dacă mulţimea J_1 are s elemente şi p necunoscute $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Dacă sistemul (III.3.40) este incompatibil, problema nu admite soluţii optime pentru $\lambda_i \neq 0$. Dacă sistemul este compatibil, mulţimea soluţiilor este un domeniu convex limitat de s hiperplane în spaţiul p-dimensional. Pentru punctele frontieră ale domeniului de optimalitate corespunzător bazei B se anulează unul din factorii relativi de cost asociaţi vectorilor nebazici şi problema admite o nouă bază optimă B', dacă vectorul corespunzător poate intra în bază. Testul de optimalitate a bazei B' conduce la un sistem de inecuaţii de aceeaşi formă cu (III.3.40) şi discuţia se continuă ca şi pentru baza B.

Dificultatea rezolvării efective a problemei constă în determinarea domeniilor de optimalitate pentru cazurile în care numărul parametrilor este mai mare decît trei. În problemele practice se pare că rareori numărul parametrilor este mai mare decît trei, în plus discuţia este simplificată şi datorită faptului că variaţia acestor parametri este cuprinsă între limite determinate. O altă simplificare a discuţiei apare în problemele în care numărul bazelor corespunzătoare soluţiilor realizabile nu este prea mare, deoarece atunci pot fi analizate criteriile de optimalitate pentru fiecare dintre aceste baze.

Deosebirea esenţială între cazul în care c este funcţie liniară de un parametru şi cazurile în care c depinde liniar de mai mulţi parametri constă în faptul că intervalele de optimalitate a bazelor se înlocuiesc cu domenii de optimalitate, iar valorile critice ale parametrului, cu mulţimea punctelor frontieră ale domeniilor.

Exemplul II. Să se determine

$$\max f = (5 - 3\lambda + \mu)x_1 + (8 + \lambda - \mu)x_2 + (10 + 2\mu)x_3,$$

respectînd condiţiile

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &\leqslant 100, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqslant 200, \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 &\leqslant 300, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\leqslant 90, \end{aligned}$$

dacă $\lambda \in [0\,;\ 2]$ şi $\mu \in [0\,;\ 1{,}5]$.

Pentru rezolvare se extinde sistemul restricţiilor prin adăugarea variabilelor de abatere şi se construiesc iteraţiile ţinînd seama numai de termenii constanţi din componentele vectorului c. Diferenţele $z_j - c_j$ sînt funcţii liniare de λ şi μ. În iteraţia 2, baza este formată din

Scanned with OKEN Scanner

vectorii a_4, a_5, a_1, a_2; factorii relativi de cost, pentru vectorii care nu aparţin bazei, sînt

$$\bar{c}_3 = 2 - 13\lambda + 3\mu,$$
$$\bar{c}_6 = 7/6 - 10/6\lambda + 4/6\mu,$$
$$\bar{c}_7 = 1/3 + 11/3\lambda - 5/4\mu,$$

deci $B_1(a_4, a_5, a_1, a_2)$ este optimă dacă $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Reprezentăm

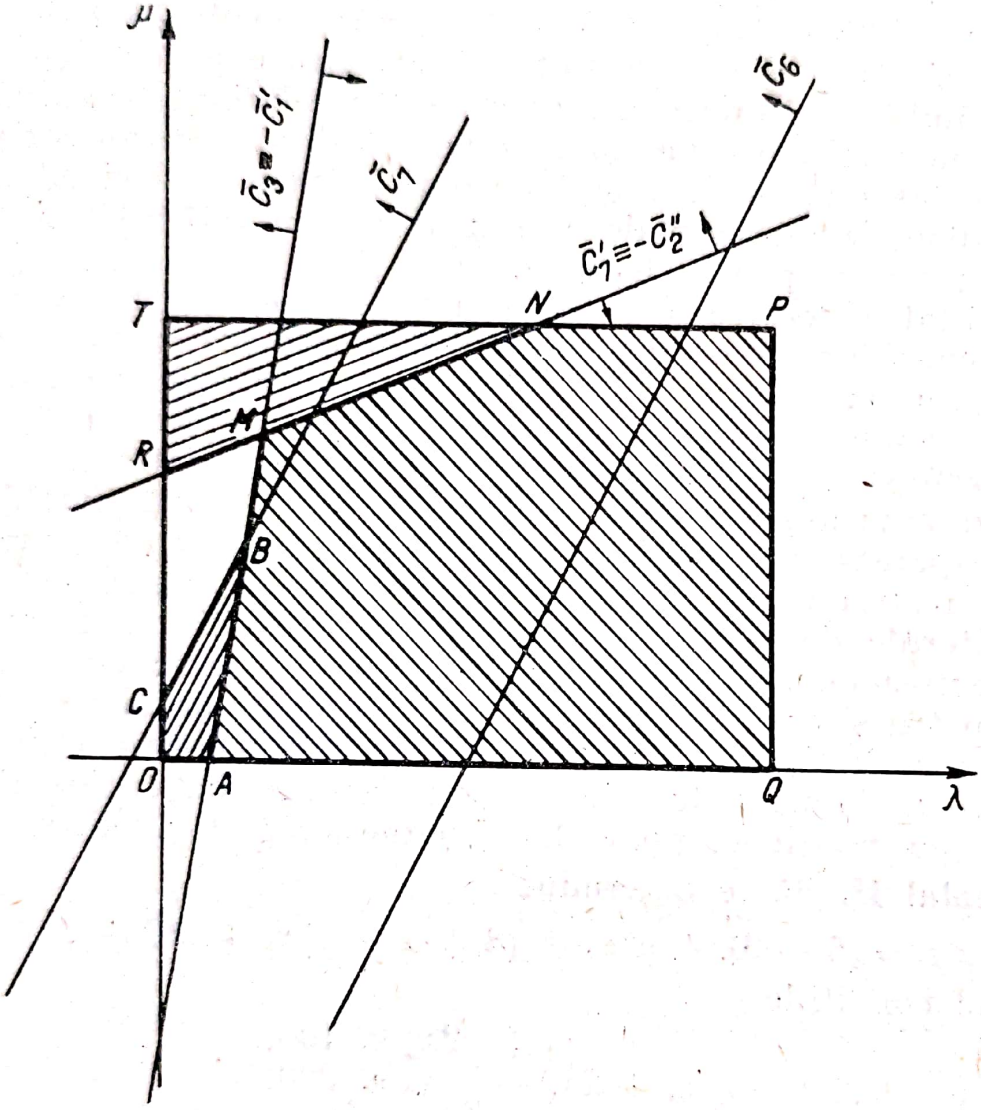


Fig. 6

grafic dreptele $\bar{c}_3 = 0$, $\bar{c}_6 = 0$, $\bar{c}_7 = 0$ pentru determinarea domeniului în care B_1 rămîne optimă. Deoarece λ şi μ iau valori în intervale finite, vom determina numai domeniile care aparţin dreptunghiului limitat de axe şi dreptele $\lambda = 2$, $\mu = 1{,}5$. Din fig. 6 reiese că B_1 este

optimă pentru perechile de valori (λ, μ) care sînt coordonatele punctelor interioare sau frontieră ale domeniului $OABC$. Pe segmentul AB se anulează c_3 şi astfel problema mai admite o bază optimă B_2 (a_4, a_5, a_3, a_2). Factorii relativi de cost pentru vectorii care nu aparţin bazei B_2 sînt

$$\bar{c}_1' = -\ 1/2 + 13/4\lambda - 3/4\mu,$$

$$\bar{c}_6' = 11/12 + 1/24\lambda + 7/24\mu,$$

$$\bar{c}_7' = 5/6 + 5/12\lambda - 11/12\mu.$$

Baza B_2 rămîne optimă pentru (λ, μ) care satisfac sistemul de inecuaţii $\bar{c}_1' \geqslant 0$; $\bar{c}_6' \geqslant 0$; $\bar{c}_7' \geqslant 0$. Se observă că $\bar{c}_1' = 0$ reprezintă aceeaşi dreaptă cu $c_3 = 0$; dreapta $\bar{c}_6' = 0$ este exterioară fîşiei din planul (λ, μ) de care ne ocupăm şi construind dreapta $\bar{c}_7' = 0$ se stabileşte că B_2 este optimă pentru punctele interioare şi frontieră ale domeniului $AQPNMA$.

Dacă se depăşeşte frontiera MB, diferenţa c_1' devine negativă; schimbarea bazei conduce din nou la B_1, deci pentru domeniul $MBCR$ nu există bază optimă. În cazul în care se depăşeşte frontiera MN, c_7 devine negativ şi $B_3(a_4, a_5, a_3, a_7)$ este optimă dacă

$$\bar{c}_1'' = -\ 1 + 3\lambda - 1/5\mu \geqslant 0,$$

$$\bar{c}_2'' = -\ 2 - \lambda + 11/5\mu \geqslant 0,$$

$$\bar{c}_6'' = 1 + 1/5\mu \geqslant 0.$$

Dreapta $\bar{c}_2'' = 0$ este identică cu $\bar{c}_7' = 0$ şi dreptele $\bar{c}_1'' = 0$, $\bar{c}_6'' = 0$ nu reduc domeniul în care $x_7 > 0$, deci B_3 este optimă pe mulţimea punctelor interioare şi frontieră din NRT.

Soluţiile optime sînt:

(90)

(λ, μ) $\in$ $OQPT$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$OABC$	60	10	0	90	120	0	0
$AQPNM$	0	25	15	45	135	0	0
RNT	0	0	30	40	170	0	60

Scanned with OKEN Scanner

8. Vectorul c funcție neliniară de unul sau mai mulți parametri

Din punct de vedere teoretic, rezolvarea problemelor în care vectorul c este funcție neliniară de unul sau mai mulți parametri nu diferă de cazurile discutate anterior. Factorii relativi de cost corespunzători unei baze realizabile sînt funcții de cel mult același grad cu gradul cel mai mare al componentei c_j din vectorul c. O bază realizabilă este optimă, în problemele de maxim, pe mulțimea soluțiilor unui sistem de inecuații

$$\bar{c}_j \geqslant 0; \quad j \in J,$$

unde $\bar{c}_j$ și J au semnificațiile obișnuite. Soluțiile sistemului determină un interval de optimalitate a bazei studiate dacă c este funcție de un singur parametru, sau un domeniu limitat de suprafețe cu s dimensiuni în spațiul s-dimensional dacă c este funcție de s parametri.

Pentru a ilustra modul de aplicare a metodei vom relua exemplul II, înlocuind vectorul c din funcția obiectiv cu un vector care depinde neliniar de un parametru.

Exemplul III. Să se determine

$$\max J = (5 - 3\lambda + \lambda^2)x_1 + (8 + \lambda + \lambda^2)x_2 + (10 + 2\lambda)x_3$$

cînd $\lambda \in [-2; 1, 5]$.

Recalculăm diferențele $z_j - c_j$ pentru B_1 (a_4, a_5, a_1, a_2) și avem

$\bar{c}_3 = 2 - 13\lambda + 3\lambda^2$; $\bar{c}_3 = 0$ pentru $\lambda_1 = 4{,}16$ și $\lambda_2 = 0{,}16$;

$\bar{c}_6 = 7/6 - 10/6\lambda + 4/6\lambda^2$; $\bar{c}_6 > 0$ pentru orice valoare reală a parametrului;

$\bar{c}_7 = 1/3 + 11/3\lambda - 5/3\lambda^2$; $\bar{c}_7 = 0$ pentru $\lambda_3 = 2{,}28$ și $\lambda_4 = -0{,}08$.

Condițiile de optim pentru B_1 sînt îndeplinite dacă $-0{,}08 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}16$.

Pentru $\lambda < -0{,}08$ avem $\bar{c}_7 < 0$. Vectorul a_7 exclude din bază pe a_2. Factorii relativi de cost pentru baza B_4 $(a_4\ a_5\ a_1\ a_7)$ sînt

$\bar{\bar{c}}_2 = -1/2 - 11/2\lambda + 5/2\lambda^2$; $\bar{\bar{c}}_2 = 0$ pentru aceleași valori cu $\bar{c}_7 = 0$;

$\bar{\bar{c}}_3 = 5/2 - 15/2\lambda + 1/2\lambda^2$; $\bar{\bar{c}}_3 = 0$ pentru $\lambda_5 = 14{,}5$, $\lambda_6 = 0{,}5$;

$\bar{\bar{c}}_6 = 5/4 - 3/4\lambda + 1/4\lambda^2$; $\bar{\bar{c}}_6 \neq 0$ pentru orice valoare a parametrului.

Se deduce că B_4 este optimă pentru orice $\lambda < -0{,}08$, deci s-a acoperit întreaga mulțime a valorilor negative pe care le poate lua λ.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\lambda > 0{,}16$, $\bar{c}_3 < 0$, vectorul a_3 înlocuieşte în bază pe a_1. Factorii relativi de cost pentru B_2 (a_4, a_5, a_3, a_2) sînt:

$\bar{\bar{c}}_1' = 1/2 + 13/4\lambda - 3/4\lambda^2$; $\bar{\bar{c}}_1' = 0$ pentru aceleaşi valori cu $\bar{c}_3 = 0$;

$\bar{\bar{c}}_6' = 11/12 - 1/24\lambda + 7/24\lambda^2$; $\bar{\bar{c}}_6' > 0$ pentru toate valorile reale ale parametrului;

$\bar{\bar{c}}_7' = 5/6 + 5/12\lambda - 11/12\lambda^2$; $\bar{\bar{c}}_7' = 0$ pentru $\lambda_9 = 1{,}1$ şi $\lambda_{10} = -0{,}7$.

Baza B_2 este optimă dacă $0{,}16 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}1$. Cînd $\lambda > 1{,}1$, $\bar{\bar{c}}_7' < 0$ şi se găseşte baza B_3 (a_4, a_5, a_3, a_7) cu următorii factori relativi de cost:

$\tilde{c}_1 = -1 + 3\lambda - 1/5\lambda^2$ $\tilde{c}_1 = 0$ pentru aceleaşi valori cu $\bar{\bar{c}}_3 = 0$;

$\tilde{c}_2 = -2 - \lambda + 11/5\lambda^2$; $\tilde{c}_2 = 0$ pentru aceleaşi valori cu $\bar{\bar{c}}_7' = 0$;

$\tilde{c}_6 = 1 + 1/5\lambda^2$; $\tilde{c}_6 > 0$ pentru orice λ real, deci B_2 este optimă cînd $1 \leqslant \lambda \leqslant 14{,}5$.

Rezumăm rezultatele în tabelul următor:

(91)

$\lambda \in [-2; 1{,}5]$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$[-2; -0{,}08]$	75	0	0	100	125	0	15
$[-0{,}08; 0{,}16]$	60	10	0	90	120	0	0
$[0{,}16; 1{,}1]$	0	25	15	45	135	0	0
$[1{,}1; 1{,}5]$	0	0	30	40	170	0	60

Exemplul IV. Reluăm acelaşi exemplu înlocuind funcţia obiectiv prin

$$\max F = (5 - 3\lambda^2 + \mu)x_1 + (8 + \lambda + \mu^2)x_2 + (10 + 2\mu)x_3;$$

$$\lambda \geqslant 0, \ \mu \geqslant 0.$$

Factorii relativi de cost pentru $B_1(a_4, a_5, a_1, a_2)$ sînt

$\bar{c}_3 = -(12\lambda^2 + \mu^2 + \lambda - 2\mu - 2)$,
$\bar{c}_6 = -1/6(9\lambda^2 + \mu^2 + \lambda - 3\mu - 7)$,
$\bar{c}_7 = 1/3(9\lambda^2 + 2\mu^2 + 2\lambda - 3\mu + 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Se reprezintă grafic curbele $\bar{c}_3 = 0$; $\bar{c}_6 = 0$; $\bar{c}_7 = 0$, care sînt elipse în planul (λ, μ), şi se stabileşte că B_1 este optimă pe mulţimea punctelor interioare elipsei E_3 cu ecuaţia $\bar{c}_3 = 0$, din care sînt excluse punctele interioare elipsei E_7 cu ecuaţia $\bar{c}_7 = 0$. Deoarece interesează

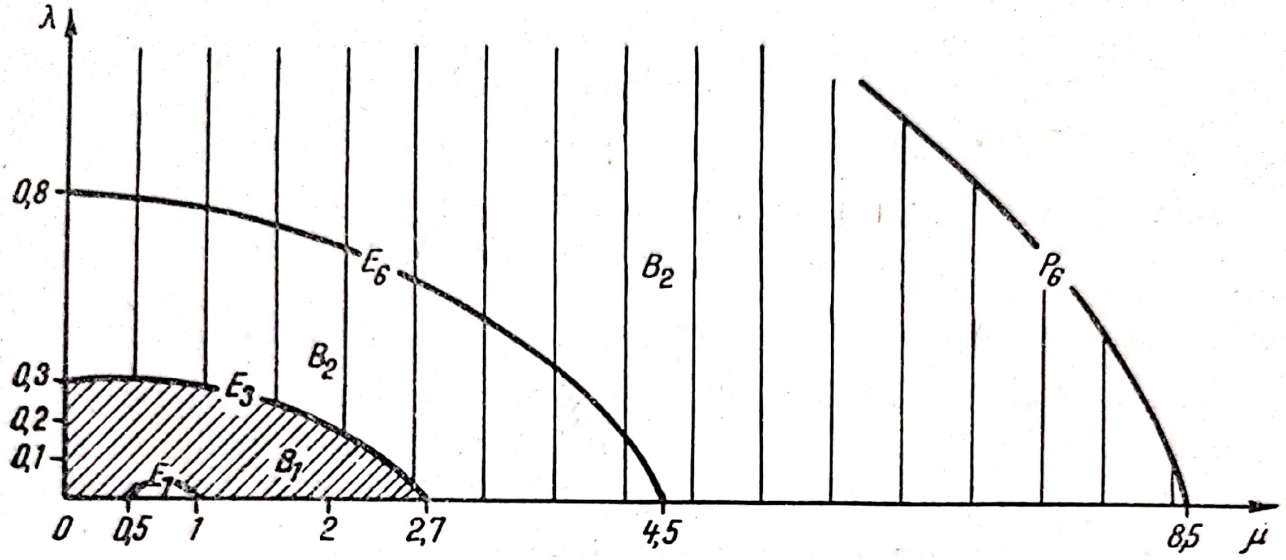


Fig. 7

numai valorile pozitive ele parametrilor, se reprezintă grafic curbele numai în cadranul pozitiv al planului (λ,μ) (fig. 7)

În punctele exterioare elipsei E_3, $\bar{c}_3 < 0$ şi schimbarea bazei conduce la B_2 (a_4, a_5, a_3, a_2), pentru care

$$\bar{c}_1' = 1/3\ (12\lambda^2 + \mu^2 + \lambda - 2\mu - 2),$$
$$\bar{c}_6' = 1/24\ (-\mu^2 + 6\mu - \lambda + 22),$$
$$\bar{c}_7' = 1/12\ (5\mu^2 - 6\mu + 5\lambda + 10),$$

$\bar{c}_1'$ este pozitiv în regiunea exterioară elipsei E_3, curba $\bar{c}_6' = 0$ este parabola P_6 şi $\bar{c}_7'$ este nenegativ în tot cadranul pozitiv al planului (λ, μ), deci B_2 este optimă în regiunea cuprinsă între curbele E_3 şi P_6 (fig. 7). Studiul se poate continua şi pentru punctele exterioare parabolei P_6.

§ 4. PARAMETRIZAREA ELEMENTELOR MATRICEI TEHNOLOGICE

1. Parametrizarea unui element al matricei

Să considerăm cazul cînd un singur element al matricei A este funcţie liniară de un parametru λ. Fie a_{sk} elementul parametrizat, expresia lui fiind

$$a_{sk}^* = a_{sk} + \lambda. \qquad \text{(III.4.1)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vectorul a_k este atunci

$$a_k^* = a_k + \lambda e_s, \qquad \text{(III.4.2)}$$

unde e_s reprezintă vectorul unitar de ordinul s. Presupunem că problema admite o bază optimă B pentru $\lambda = 0$. Este posibil ca a_k să aparţină sau să nu aparţină bazei B. Trebuie analizată fiecare situaţie, pentru a determina intervalul de optimalitate al acestei baze.

Cazul I. Vectorul a_k^* nu aparţine bazei B. În acest caz, soluţia asociată bazei B este independentă de λ, dar factorul realativ de cost $\bar{c}_k^*$, corespunzător vectorului a_k^*, este funcţie de λ şi are forma

$$\bar{c}_k^* = c_B g_k^* - c_k = c_B B^{-1} a_k^* - c_k = (c_B B^{-1} a_k - c_k) + \\ + \lambda c_B B^{-1} e_s = \bar{c}_k + \lambda c_B B^{-1} e_s,$$

unde $\bar{c}_k$ este factorul relativ de cost pentru vectorul constant a_k. Această expresie se mai poate transforma ţinînd seama că produsul unei matrice printr-un vector unitar de ordinul s este egal cu coloana s a matricei. Deci, notînd cu β_i coloanele matricei B^{-1}, avem

$$B^{-1} e_s = \beta_s.$$

Efectuînd această înlocuire în expresia lui $\bar{c}_k^*$ avem

$$\bar{c}_k^* = \bar{c}_k + \lambda c_B \beta_s. \qquad \text{(III.4.3)}$$

În cazul în care B este bază optimă pentru $\lambda = 0$ şi problema considerată cere minimul funcţiei obiectiv, atunci $\bar{c}_k$ este nepozitiv şi B rămîne optimă dacă şi $\bar{c}_k^*$ este nepozitiv pentru toţi vectorii care nu aparţin bazei. Se poate presupune că $c_B \beta_s \leqslant 0$ şi atunci baza B este optimă pentru orice $\lambda \geqslant 0$; $c_B \beta_s > 0$ şi atunci baza B este optimă numai pentru $\lambda \leqslant \lambda_1$, unde

$$\lambda_1 = -\frac{\bar{c}_k}{c_B \beta_s}, \qquad \text{(III.4.4)}$$

λ_1 dat de relaţia (III.4.4) este o valoare critică a parametrului. Pentru $\lambda > \lambda_1$ $\bar{c}_k^*$ devine pozitiv şi B nu mai este bază optimă. Soluţia se reoptimizează dacă vectorul a_k^* intră în bază. Astfel se ajunge la:

Cazul II. Vectorul a_k aparţine bazei B. Deoarece B este o bază, vectorii ei sînt liniar independenţi pentru $\lambda = 0$; cînd $\lambda \neq 0$ se poate ca:

a) matricea B_k^* obţinută înlocuind în B vectorul a_k prin a_k^* să nu mai fie o bază;

b) soluţia $x_{B^*} = (B^*)^{-1} d$ să nu mai fie realizabilă;

c) factorii de cost $\bar{c}_j^{**}$ corespunzători vectorilor care nu aparţin bazei să nu mai satisfacă condiţiile de optimalitate.

Scanned with OKEN Scanner

În fiecare dintre aceste ipoteze se poate determina valoarea critică a parametrului λ sau se dovedește că nu există o astfel de valoare. Discutăm fiecare din ipotezele anterioare.

a) Deoarece B constituie o bază, a_k^* poate fi scris ca o combinație liniară a vectorilor din B, adică

$$a_k^* = Bg_k^*$$

sau

$$g_k^* = B^{-1}a_k^* = B^{-1}(a_k + \lambda e_s) = e_s + \lambda\beta_s. \qquad \text{(III.4.5)}$$

Dacă vectorul a_k din B se înlocuiește prin a_k^* vectorii matricei obținute în acest fel formează o bază dacă și numai dacă $g_{k,k} \neq 0$. Din (III.4.5) avem

$$g_{k,k}^* = 1 + \lambda\beta_{kk}.$$

Condiția $g_{k,k}^* \neq 0$ este îndeplinită pentru orice λ dacă $\beta_{k,k}^* = 0$; în caz contrar, $g_{k,k}^* = 0$ pentru

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\beta_{k,k}}, \qquad \text{(III.4.6)}$$

Rezumînd se poate spune că dacă $a_k^* \in B$, bază optimă pentru $\lambda = 0$, atunci vectorii matricei B^* găsită înlocuind pe a_k din B prin a_k^* formează o bază:

a_1) pentru orice λ, dacă $\beta_{k,k} = 0$;

a_2) numai pentru $\lambda \neq -\frac{1}{\beta_{k,k}}$, dacă $\beta_{k,k} \neq 0$ și în acest caz $\lambda_2 = -\frac{1}{\beta_{k,k}}$ este valoarea critică a parametrului.

b) Să admitem că vectorii matricei B^* formează o bază. Inversa acestei matrice $(B^*)^{-1}$, se calculează cu ușurință (v.cap.I, § 3, punctul 7), deoarece B^* diferă de B printr-un singur vector și B^{-1} este cunoscut. Astfel avem

$$(B^*)^{-1} = E_{k^*}^{(m)} B^{-1}.$$

O dată ce $(B^*)^{-1}$ este cunoscut se calculează soluția asociată bazei B^* cu ajutorul formulei

$$x_{B^*} = (B^*)^{-1} d = E_{k^*}^{(m)} B^{-1} d = E_{k^*}^{(m)} x_B \qquad \text{(III.4.7)}$$

Scanned with OKEN Scanner

și se determină valoarea critică a parametrului rezolvînd sistemul de inecuații rezultat din condițiile de nenegativitate a componentelor vectorului soluție x_{B^*}.

c) Factorii relativi de cost, pentru B^*, sînt

$$\bar{c}_j^{**} = z_j - c_j = c_B (B^*)^{-1} a_j - c_j = c_B E_{k^*}^{(m)} B^{-1} a_j - c_j =$$

$$= c_B E_{k^*}^{(m)} g_j - c_j.$$

Condițiile de optimalitate a unei baze cer ca toți factorii relativi de cost asociați vectorilor care nu aparțin bazei să fie nepozitivi, încît valoarea critică a parametrului se determină rezolvînd sistemul de inecuații

$$\bar{c}_j^{**} \leqslant 0 \qquad \text{pentru } j \notin B^*. \tag{III.4.8}$$

Exemplul I. Să se calculeze

$$\min z = x_1 + x_2$$

pe mulțimea soluțiilor nenegative ale sistemului

$$\begin{aligned} 3x_1 + (1 - \lambda)\ x_2 &= 7, \\ -\ x_1 + \quad 2x_2 &\leqslant 7, \\ 4x_1 - \quad x_2 &\leqslant 7. \end{aligned}$$

Se rezolvă modelul pentru $\lambda = 0$. Problema extinsă pentru aplicarea algoritmului simplex este:

$$\min\ z = x_1 + x_2 + Mx_3,$$

cu respectarea condițiilor

$$\begin{aligned} 3x_1 + (1 - \lambda)x_2 + x_3 \qquad\quad &= 7, \\ -\ x_1 + \quad 2x_2 \quad + x_4 \quad &= 7, \\ 4x_1 - \quad x_2 \qquad + x_5 &= 7, \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

După două iteraţii se găseşte soluţia optimă.

Tabelul soluţiei optime pentru $\lambda = 0$

(92)

c_B ↓	$c_j \longrightarrow$		1	1	M	0	0
	Baza	d	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	a_2	1		1	4/7		−3/7
0	a_4	7			−1	1	1
1	a_1	2	1		1/7		1/7
$z_j - c_j$		3	0	0	$5/7 - M$	0	−2/7

Vectorul parametrizat a_2 aparţine bazei optime. Tabelul optim pentru $\lambda = 0$, transformat pentru $\lambda \neq 0$, este:

Tabelul simplex pentru $\lambda \neq 0$

(93)

c_B ↓	$c_j \longrightarrow$		1	1	0	0
	Baza	d	a_1	a_2	a_4	a_5
1	a_2	$\frac{7}{7-4\lambda}$		1		$\frac{-3}{7-4\lambda}$
0	a_4	$\frac{7(7-5\lambda)}{7-4\lambda}$			1	$\frac{7-\lambda}{7-4\lambda}$
1	a_1	$\frac{7(2-\lambda)}{7-4\lambda}$	1			$\frac{1-\lambda}{7-4\lambda}$
$z_j - c_j$		$\frac{7(3-\lambda)}{7-4\lambda}$	0	0	0	$-\frac{2+\lambda}{7-4\lambda}$

În tabelul (93) nu mai apare vectorul a_3, care nu mai poate intra în bază deoarece este asociat variabilei artificiale x_3. Din tabelul (93) rezultă că o valoare critică a parametrului este $\lambda = 7/4$. În cazul în care $\lambda \neq 7/4$ vectorii (a_2, a_4, a_1) formează o bază care este op-

Scanned with OKEN Scanner

timă dacă sînt nenegative $\bar{x}_2$, $\bar{x}_4$, $\bar{x}_1$ (componentele soluției) și dacă $\bar{c}_5 \leqslant 0$. Aceste condiții conduc la inecuațiile

$$\frac{7}{7-4\lambda} \geqslant 0\,;\ \frac{7(7-5\lambda)}{7-4\lambda} \geqslant 0\,;\ \frac{7(2-\lambda)}{7-4\lambda} \geqslant 0\,;\ \frac{2+\lambda}{7-4\lambda} \geqslant 0,$$

care sînt simultan satisfăcute pentru $-2 \leqslant \lambda \leqslant 7/5$. Cînd $\lambda = -2$ componentele soluției sînt $x_2 = 7/15$; $x_4 = 119/15$; $x_1 = 28/15$ și $\bar{c}_5 = 0$, deci există încă o bază optimă care conține vectorul a_5. Componentele acestui vector în baza formată de vectorii (a_2, a_4, a_1) sînt $-3/15$; $9/15$; $3/15$. Schimbarea bazei conduce la:

Tabelul simplex pentru $\lambda \leqslant -2$

(94)

c_B ↓	$c_j \longrightarrow$		1	1	0	0
	Baza	d	a_1	a_2	a_4	a_5
1	a_2	$\frac{7}{1-\lambda}$	$\frac{3}{1-\lambda}$	1		
0	a_4	$\frac{-7(1+\lambda)}{1-\lambda}$	$-\frac{7-\lambda}{1-\lambda}$		1	
0	a_5	$\frac{7(2-\lambda)}{1-\lambda}$	$\frac{7-4\lambda}{1-\lambda}$			1
$z_j - c_j$		$\frac{7}{1-\lambda}$	$\frac{2+\lambda}{1-\lambda}$	0	0	0

Valoarea $\lambda = 1$ pentru care a_5 nu va putea să intre în bază nu aparține intervalului de variație de care ne ocupăm acum. Baza (a_2, a_4, a_5) este optimă dacă sînt satisfăcute inecuațiile

$$\frac{7}{1-\lambda} \geqslant 0\,;\ \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \leqslant 0\,;\ \frac{2-\lambda}{1-\lambda} \geqslant 0\,;\ \frac{2+\lambda}{1-\lambda} \leqslant 0.$$

E ușor de văzut că aceste condiții nu pot fi simultan îndeplinite. Rezultatele găsite pînă acum sînt:

— baza formată de vectorii (a_2, a_4, a_5) nu este optimă pentru nici o valoare a parametrului;

— baza formată de vectorii (a_2, a_4, a_1) este optimă pentru $-2 \leqslant \lambda \leqslant 7/5$.

Studiul problemei se completează determinînd baza optimă pentru $\lambda > 7/5$ sau dovedind că nu există soluție optimă pentru aceste valori ale parametrului.

Scanned with OKEN Scanner

2. Parametrizarea unui vector al matricei

Să admitem că vectorul coloană a_k din matricea tehnologică a unei probleme de programare liniară depinde de un parametru și poate fi scris sub forma

$$a_k^* = a_k + \lambda a_k', \tag{III.4.9}$$

a_k și a_k' fiind vectori constanți. Determinarea valorilor critice nu diferă esențial de cazul precedent și comportă considerarea aceloraşi situații, și anume: a_k aparține sau nu bazei optime pentru $\lambda = 0$.

Dacă a_k nu aparține bazei optime, valoarea critică a parametrului este

$$\lambda_1 = -\frac{\bar{c}_k}{c_B B^{-1} a_k'} \tag{III.4.10}$$

sau nu există valoare critică dacă $c_B B^{-1} a_k' \leqslant 0$ (în problemele de minim) și B este optimă pentru orice $\lambda \geqslant 0$.

Dacă a_k^* aparține bazei optime pentru $\lambda = 0$, se verifică dacă vectorii matricei B^* (găsită înlocuind pe a_k prin a_k^* în B) constituie o bază. Pentru aceasta se calculează componentele vectorului a_k^* în baza B. Avem

$$g_k^* = B^{-1}(a_k + \lambda a_k') = e_k + \lambda B^{-1} a_k'. \tag{III.4.11}$$

Din relația (III.4.11) se găsește valoarea critică pentru λ prin același raționament care a condus la determinarea valorii λ_2 din formula (III.4.6).

Inversa matricei B^* se calculează folosind formula inversei unei matrice sub formă de produs, calculele nefiind mai complicate decît în cazul parametrizării unui singur element, deoarece dispunem de g_k^* calculat în (III.4.11). O dată ce $(B^*)^{-1}$ este cunoscut se calculează, cu ajutorul formulelor obișnuite, componentele soluției asociate acestei baze și factorii relativi de cost. Intervalul în care B^* își păstrează optimalitatea este determinat de valoarea maximă și minimă pentru care sînt satisfăcute condițiile de nenegativitate ale vectorului $\bar{x}_{B^*}$ și condițiile referitoare la factorii relativi de cost.

3. Parametrizarea unui grup de vectori ai matricei

În problemele practice, numărul variabilelor este de obicei cu mult mai mare decît numărul restricțiilor, care sînt în general inecuații, necesitînd adăugarea variabilelor, de abatere sau artificiale

Scanned with OKEN Scanner

pentru aplicarea algoritmului simplex. Matricea A are deci mai mulţi vectori-coloană decît vectori-linie. Această observaţie ne îndreptăţeşte să facem următoarea presupunere: dacă un număr de vectori-coloană din A sînt parametrizaţi se poate determina totuşi o bază corespunzătoare unei soluţii realizabile care să nu cuprindă nici un vector parametrizat. Fie B o astfel de bază. Notăm mulţimile indicilor următorilor vectori, astfel:

$N = \{1, \ldots, n\}$ indicii vectorilor matricei A;
$I = \{1, \ldots, m\}$ indicii vectorilor bazei B;
$P = \{n-p+1, \ldots, n\}$ indicii vectorilor parametrizaţi pe care îi considerăm ca fiind ultimii p vectori din A.

Admitem că factorii relativi de cost în baza B, pentru vectorii ai căror indici aparţin mulţimii $N - J - P$, sînt negativi sau nuli (într-o problemă de minim). Optimalitatea bazei B în problema parametrizată depinde de factorii relativi de cost ai vectorilor din mulţimea P. Dacă a_r^*; $r \in P$ este de forma

$$a_r^* = a_r + \lambda a_r', \qquad r \in P$$

mărimile $\bar{c}_r^*$ sînt

$$\bar{c}_r^* = c_B B^{-1} a_r^* - c_r = c_B B^{-1}(a_r + \lambda a_r') - c_r = \\ = (c_B B^{-1} a_r - c_r) + \lambda c_B B^{-1} a_r',$$

Deoarece $c_B B^{-1}\, a_r - c_r = \bar{c}_r$ iar $B^{-1}\, a' = g_r'$ rezultă că

$$\bar{c}_r^* = \bar{c}_r + \lambda c_B g_r'; \quad r \in P, \tag{III.4.12}$$

Baza B este optimă dacă

$$\bar{c}_r + \lambda c_B g_r' \leqslant 0; \quad r \in P. \tag{III.4.13}$$

Condiţiile (III.4.13) constituie un sistem de p inecuaţii liniare, care poate fi incompatibil sau satisfăcut pentru $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$.

Dacă sistemul (III.4.13) este incompatibil se alege o valoare a parametrului pentru care cel mai mic număr de factori relativi de cost nu satisfac criteriul de optimalitate şi se continuă iteraţiile.

Dacă B este optimă pentru $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ şi cel puţin una dintre aceste valori este finită, de exemplu λ_2, se caută baza optimă pentru $\lambda > \lambda_2$ şi procesul continuă iterativ.

În problemele practice este posibil să apară mai mulţi parametri care să determine variaţia unui vector coloană. Dacă se folosesc, de exemplu, doi parametri λ şi θ, condiţiile (III.4.13) devin

$$\bar{c}_r + \lambda c_B g_r' + \theta c_B g_r'' \leqslant 0; \quad r \in P \tag{III.4.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

și intervalul de optimalitate se înlocuiește printr-un domeniu situat în spațiul R_2, limitat de r drepte.

Exemplul II. Într-o secție de sculărie se pot lucra cinci tipuri de piese, care necesită folosirea a două mașini-unelte. Timpul folosit pentru o piesă pe fiecare mașină este consemnat în tabelul (95).

Timp necesar

(95)

Piesa / Mașina	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Timpul disponibil
I	1	3	$2 + 0{,}1\lambda$	$4 + 0{,}3\lambda$	1	24
II	1,5	1	$3 - 0{,}2\lambda$	$1 + 0{,}2\lambda$	5	30

Piesele P_3 și P_4 pot fi executate din materiale de diferite densități, astfel că timpul necesar prelucrării depinde de materialul folosit. Parametrul λ poate lua valori în intervalul $[-5, 12]$.

Planul de producție cere ca numărul de piese P_5 să reprezinte 40% din totalul pieselor realizate. Se urmărește planificarea producției, astfel ca numărul total de piese să fie maxim.

Se notează cu x_i, $i = 1, \ldots, 5$ numărul de piese care se pot produce. Restricțiile problemei sînt

$$x_1 + 3x_2 + (2 + 0{,}1\lambda)x_3 + (4 + 0{,}3\lambda)x_4 + x_5 \leqslant 24,$$

$$1{,}5x_1 + x_2 + (3 - 0{,}2\lambda)x_3 + (1 + 0{,}2\lambda)x_4 + 5x_5 \leqslant 30,$$

$$\frac{40}{100}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = x_5, \qquad \text{(III.4.15)}$$

$$x_i \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, 5,$$

iar obiectivul

$$\max z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5. \qquad \text{(III.4.16)}$$

Sistemul de restricții poate fi modificat astfel:

— se rezolvă ultima relație din (III.4.15) în raport cu x_5 și avem

$$x_5 = \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4);$$

Scanned with OKEN Scanner

— se elimină x_5 din celelalte relaţii ale sistemului şi din funcţia obiectiv; cu aceste transformări modelul problemei este

$$5x_1 + 11x_2 + (8 + 0{,}3\lambda)x_3 + (14 + 0{,}9\lambda)x_4 \leqslant 72,$$
$$14{,}5x_1 + 13x_2 + (19 - 0{,}6\lambda)x_3 + (13 + 0{,}6\lambda)x_4 \leqslant 90, \qquad \text{(III.4.17)}$$
$$x_i \geqslant 0 \qquad i = 1, \ldots, 4;$$
$$\max z = \frac{5}{3}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4). \qquad \text{(III.4.18)}$$

Vectorii asociaţi variabilelor de abatere a_6 şi a_7, care se adaugă pentru transformarea inecuaţiilor (III.4.17) în ecuaţii, formează baza pentru iniţierea algoritmului simplex.

c_B ↓	$c_j \rightarrow$		0	0	1	1	1	1
	Baza	d	a_6	a_7	a_1	a_2	a_3	a_4
0	a_6	72	1	0	5	11	$8+0{,}3\lambda$	$14+0{,}9\lambda$
0	$\leftarrow a_7$	90	0	1	14,5*	13	$19-0{,}6\lambda$	$13+0{,}5\lambda$
$z_j - c_j$		0	0	0	−1	−1		
0	$\leftarrow a_6$	40,97	1	−0,34	0	6,51*		
1	a_1	6,2	0	0,07	1	0,9		
$z_j - c_j$		6,2	0	0,07	0	−0,1		
1	a_2	6,3	0,15	−0,05	0	1	$0{,}21+0{,}07\lambda$	$2{,}08+0{,}13\lambda$
1	a_1	0,54	−0,13	0,11	1	0	$1{,}1\ -0{,}1\lambda$	$-0{,}9\ -0{,}07\lambda$
$z_j - c_j$		6,84	0,02	0,06	0	0	$0{,}31-0{,}03\lambda$	$0{,}18+0{,}06\lambda$

În calcule s-au luat coeficienţii $c_j = 1$, $j = 1, \ldots, 4$, deoarece funcţia $z = 5/3 \sum_{i=1}^{5} x_i$ este maximă o dată cu $z = \sum_{i=1}^{5} x_i$. În prima iteraţie nu s-au calculat vectorii a_3 şi a_4, fiindcă îmbunătăţirea soluţiei se face lucrînd numai cu vectorii neparametrizaţi. În iteraţia a doua s-a obţinut baza optimă pentru matricea formată numai din vectorii

Scanned with OKEN Scanner

constanți. Testul de optimalitate a bazei (a_2, a_1) pentru problema completă necesită calculul factorilor relativi de cost $\bar{c}_3$ și $\bar{c}_4$. Baza (a_2, a_1) este optimă dacă

$$\bar{c}_3 = 0{,}31 - 0{,}03\lambda \geqslant 0\,; \quad \bar{c}_4 = 0{,}18 + 0{,}06\lambda \geqslant 0. \qquad \text{(III.4.19)}$$

Rezolvînd sistemul de inecuații (III.4.19) găsim că soluția din iterația ultimă este optimă pentru $-3 \leqslant \lambda \leqslant 10{,}3$. Producția planificată este de 0,54 piese P_1, 6,3 piese P_2 și 4,56 piese P_5.

Intervalul de variație a parametrului fiind $[-5; 12]$, trebuie căutată soluția optimă și pentru $\lambda \leqslant -3$; $\lambda \geqslant 10{,}3$.

Dacă $\lambda = -3$, c_4 se anulează; calculînd a_4 în baza (a_2, a_1) și valorile componentelor acestui vector pentru $\lambda = -3$, găsim

$$g_{2,4} = 2{,}08 + 0{,}13\lambda\,; \qquad g_{2,4}(-3) = 1{,}69\,;$$

$$g_{1,4} = -0{,}9 - 0{,}07\lambda \qquad g_{1,4}(-3) = -0{,}68.$$

Noua bază este formată din (a_4, a_1). Pentru testul de optimalitate se calculează:

$$\bar{\bar{c}}_6 = \frac{0{,}39 - 0{,}015\lambda}{2{,}08 + 0{,}13\lambda}\,; \qquad \bar{\bar{c}}_6 \geqslant 0 \text{ pentru } -16 \leqslant \lambda \leqslant 26,$$

$$\bar{\bar{c}}_7 = \frac{0{,}134 + 0{,}011\lambda}{2{,}08 + 0{,}13\lambda}\,; \qquad \bar{\bar{c}}_7 \geqslant 0 \text{ pentru } -16 \geqslant \lambda\,;\ \lambda \geqslant 12{,}18,$$

$$\bar{\bar{c}}_2 = -\frac{0{,}18 + 0{,}06\lambda}{2{,}08 + 0{,}13\lambda}\,; \qquad \bar{\bar{c}}_2 \geqslant 0 \text{ pentru } -16 \leqslant \lambda \leqslant -3,$$

$$\bar{\bar{c}}_3 = \frac{0{,}607 - 0{,}047\lambda - 0{,}008\lambda^2}{2{,}08 + 0{,}13\lambda}\,; \qquad \bar{\bar{c}}_3 \geqslant 0 \text{ pentru } -12{,}13 \leqslant \lambda \leqslant 6{,}25.$$

Condițiile de optim sînt simultan satisfăcute pentru $-12{,}13\lambda \leqslant -3$.

Soluția optimă asociată bazei (a_4, a_1) este funcție de λ și are componentele

$$x_4 = \frac{6{,}3}{2{,}08 + 0{,}13\lambda}, \qquad x_1 = \frac{6{,}7932 + 0{,}5112\lambda}{2{,}08 + 0{,}13\lambda}\,;$$

x_1 nu este pozitiv pentru tot intervalul $[-12{,}13; -3]$, dar rămîne pozitiv pe intervalul $[-5, -3]$ care interesează în problema propusă.

Pentru acoperirea întregului interval de variație a parametrului mai trebuie considerat cazul $\lambda \geqslant 10{,}3$. Cînd $\lambda = 10{,}3$ se anulează $\bar{\bar{c}}_3$; componentele vectorului a_3 în baza (a_2, a_1) sînt

$$g_{2,3} = 0{,}21 + 0{,}07\lambda\,; \qquad g_{2,3}\,(10{,}3) = 0{,}93\,;$$

$$g_{1,3} = 1{,}1 - 0{,}1\lambda\,; \qquad g_{1,3}(10{,}3) = 0{,}07.$$

Scanned with OKEN Scanner

Făcînd rapoartele dintre componentele vectorului soluție și ale vectorului a_3 în baza (a_2, a_1) găsim că baza nouă este formată din (a_3, a_1). Factorii relativi de cost ai vectorilor care nu aparțin bazei sînt

$$\tilde{c}_6 = \frac{-0{,}05 + 0{,}019\lambda}{0{,}21 + 0{,}07\lambda} \qquad \tilde{c}_6 \geqslant 0 \quad \lambda \leqslant -3\,;\ \lambda \geqslant 2{,}6\,;$$

$$\tilde{c}_7 = \frac{0{,}028 + 0{,}003\lambda}{0{,}21 + 0{,}07\lambda} \qquad \tilde{c}_7 \geqslant 0 \quad \lambda \leqslant -9{,}3\,;\ \lambda \geqslant -3\,;$$

$$\tilde{c}_2 = -\frac{0{,}31 - 0{,}03\lambda}{0{,}21 + 0{,}07\lambda} \qquad \tilde{c}_2 \geqslant 0 \quad \lambda \leqslant -3\,;\ \lambda \geqslant 10{,}3\,;$$

$$\tilde{c}_4 = \frac{-0{,}607 + 0{,}047\lambda + 0{,}008\lambda^2}{0{,}21 + 0{,}07\lambda} \qquad \tilde{c}_4 \geqslant 0 \quad -16 \leqslant \lambda \leqslant -12{,}13\,;\ \lambda \geqslant 6{,}25\,;$$

Toți factorii relativi de cost sînt pozitivi pentru $\lambda \geqslant 10{,}3$, deci baza (a_3, a_1) este optimă. Rezultatele găsite se pot sintetiza în schema din fig. 8.

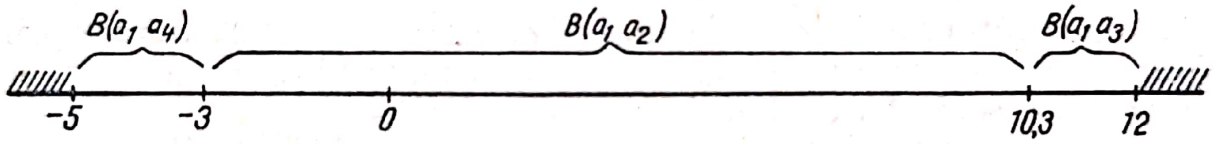


Fig. 8

Cazurile de parametrizare a elementelor matricei tehnologice discutate în acest paragraf nu constituie o tratare completă a problemei propuse, totuși ele dau posibilitatea soluționării unora dintre situațiile mai frecvent întîlnite în practică.

§ 5. PARAMETRIZAREA TUTUROR COEFICIENȚILOR ÎN PROBLEMELE DE PROGRAMARE LINIARĂ

1. Determinarea intervalelor de optimalitate a soluțiilor

O problemă de programare liniară în care toți coeficienții modelului sînt funcții de același parametru poate apare în elaborarea unui plan de atribuire a forței de muncă, atunci cînd necesarul acesteia fluctuează datorită unor condiții care pot fi prevăzute. De exemplu, ne putem gîndi la atribuirea forței de muncă în agricultură. Unele munci pot

deveni necesare într-o anumită perioadă de timp, acest lucru fiind dependent de condițiile atmosferice (căldură, cantitatea de ploaie etc.).

O astfel de problemă se poate formula ca un model de programare liniară în care coeficienții sînt funcții de timp, dacă se cunoaște variația coeficienților în funcție de acest parametru. Analiza soluțiilor problemei parametrice înlătură necesitatea soluționării unui număr de modele cu coeficienți constanți care corespund ipotezelor ce pot fi prevăzute.

Rezolvarea unei probleme de programare liniară în care toți coeficienții sînt parametrizați comportă:

a) rezolvarea problemei pentru o valoare particulară $t = t_0$ a parametrului;

b) determinarea intervalului $[t_1, t_2]$ de variație a parametrului pentru care baza găsită este optimă; dacă acest interval există se ia $t = t_1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ și arbitrar de mic, și se face schimbarea bazei:

— prin aplicarea algoritmului simplex primal dacă pentru $t = t_1 + \varepsilon$ un factor relativ de cost nu mai satisface criteriul de optim;

— prin algoritmul dual simplex dacă pentru $t = t_1 + \varepsilon$ o componentă a soluției devine negativă;

c) dacă intervalul de variație a parametrului pentru baza optimă corespunzătoare valorii $t = t_0$ se reduce la punctul t_0, se ia $t = t_0 + \varepsilon$ și se obține schimbarea bazei ca în cazul (*b*).

Procesul iterativ este finit, deoarece numărul vectorilor din matricea restricțiilor este finit.

Dificultatea aplicării algoritmului constă în rezolvarea sistemelor de inecuații care asigură optimalitatea bazei și nenegativitatea componentelor soluției. Se știe că în problemele de programare liniară, o bază B este optimă dacă vectorul soluție x_B este nenegativ și dacă factorii relativi de cost $\bar{c}_j$ corespunzători vectorilor care nu aparțin bazei sînt: pozitivi în problemele de maxim, negativi în problemele de minim. În cazul de care ne ocupăm, atît x_B cît și $\bar{c}_j$ sînt funcții de parametrul t. Pentru formularea condițiilor de optimalitate a unei baze să considerăm problema primală și duala ei în forma

$$\begin{array}{lll} & Ax \geqslant b, & uA \leqslant c, \\ (P) & x \geqslant 0, & (D) \quad u \geqslant 0, \\ & \min z = cx; & \max r = ub. \end{array} \qquad \text{(III.5.1)}$$

Toți coeficienții matricei A în modelele (III.5.1) sînt funcții de parametrul t și se notează cu $a_{ij}(t)$; de asemenea, componentele vectorilor b și c sînt funcții de același parametru încît se pot scrie sub forma $b_i(t)$; $i = 1, \ldots, m$, respectiv $c_j(t)$; $j = 1, \ldots, n$.

Putem considera baza B formată din primii m vectori ai matricei A, fără a micșora generalitatea expunerii. Soluția asociată bazei B

$$\bar{x} = B^{-1}b = \bar{x}(t) \tag{III.5.2}$$

este realizabilă dacă $\bar{x}_i(t) \geqslant 0$ pentru $i = 1, \ldots, m$. Această soluție este optimă dacă

$$\bar{c}_j = z_j(t) - c_j(t) \leqslant 0. \tag{III.5.3}$$

Se știe că

$$z_j(t) = c_B g_j = c_B B^{-1} a_j = \bar{u} a_j,$$

unde $\bar{u} = c_B B^{-1}$ este soluția problemei (D) pentru duala bazei B.

Condiția (III.5.3) scrisă sub forma

$$\bar{c}_j = \bar{u} a_j - c_j \leqslant 0$$

arată că vectorul $\bar{u}$ satisface restricțiile problemei (D).

Baza B este optimă pentru valorile parametrului t care satisfac sistemul de inecuații:

$$\begin{aligned} &x_i(t) \geqslant 0; && i = 1, \ldots, m, \\ &\bar{u}(t) a_j(t) \leqslant c_j(t); && j = m+1, \ldots, n \end{aligned} \tag{III.5.4}$$

Dacă sistemul (III.5.4) este compatibil se determină intervalul $[t_1, t_2]$ de variație a parametrului t pentru care B este baza optimă. O problemă asupra căreia ne vom opri este aceea a „sensibilității" valorii optime a funcției obiectiv în vecinătatea unui punct extrem al intervalului de optimalitate a soluției. Înainte de a aborda această problemă vom rezolva un exemplu simplu, în care toți coeficienții modelului sînt parametrizați.

Exemplul I. Să se studieze

$$\max z = (3 + 2t)x_1 + (4 + 5t)x_2 \tag{III.5.5}$$

pe mulțimea soluțiilor nenegative ale sistemului

$$\begin{aligned} &(2 + 2t)x_1 + (3 + 4t)x_2 \leqslant 8 + t, \\ &(5 + t)x_1 + (2 + 3t)x_2 \leqslant 9 + 2t \end{aligned} \tag{III.5.6}$$

Considerăm $t = 0$ și rezolvăm geometric problema de programare

$$\max z = 3x_1 + 4x_2, \tag{III.5.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

respectînd condiţiile

$$\begin{aligned} (D_1) \qquad & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 8, \\ (D_2) \qquad & 5x_1 + 2x_2 \leqslant 9, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{III.5.8}$$

Soluţia optimă se găseşte astfel:

— se reprezintă grafic dreptele (D_1) şi (D_2) în R_2;

— se determină semiplanele în care sînt satisfăcute condiţiile (III.5.8); din intersecţia acestor semiplane rezultă poligonul soluţiilor realizabile;

— se reprezintă vectorul $c(3;4)$ şi dreapta normală pe c;

— optimul funcţiei z, în reprezentarea grafică, este dreapta $\bar{z}$ care trece prin vîrful A al poligonului soluţiilor realizabile.

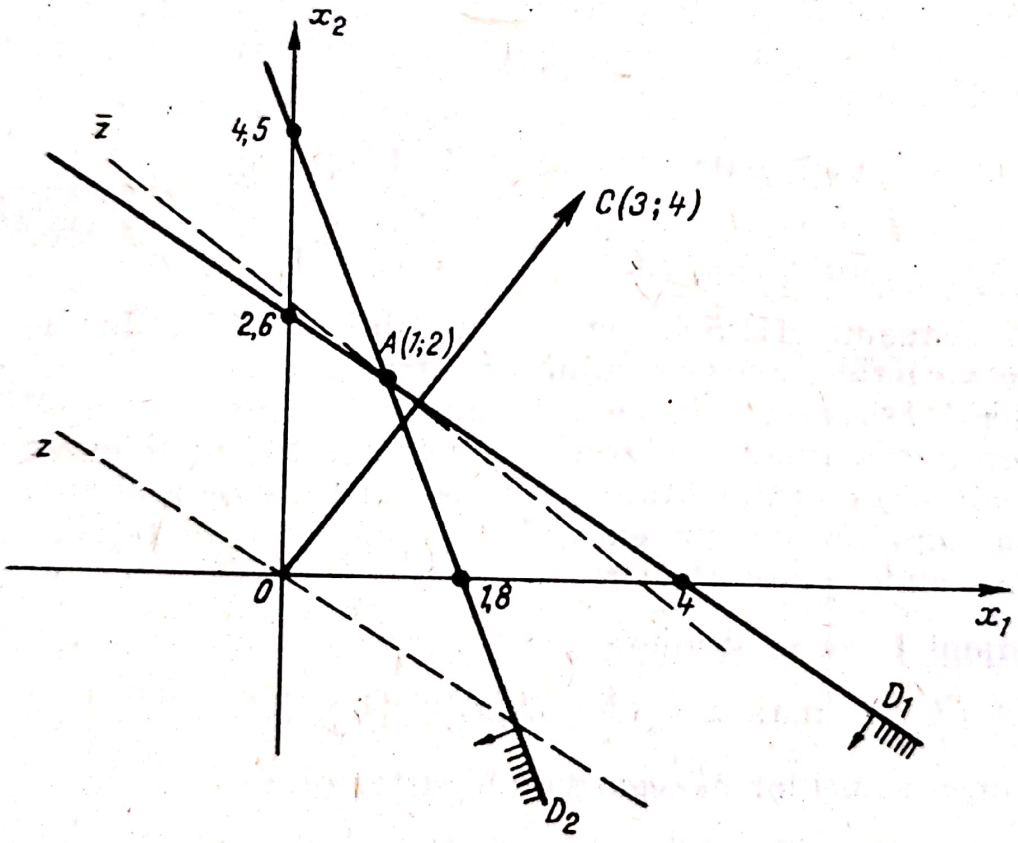


Fig. 9

Soluţia optimă este $x_1 = 1$; $x_2 = 2$ şi valoarea funcţiei obiectiv în punctul $A(1;2)$ este $z(A) = 11$. Aceste rezultate se deduc fără dificultate din fig. 9. Revenind la problema parametrizată, transformăm sistemul (III.5.6) prin adăugarea variabilelor x_3 şi x_4 şi con-

Scanned with OKEN Scanner

struim iteraţiile necesare pentru determinarea soluţiei în baza B formată din vectorii (a_1, a_2). Calculele sînt redate în tabelul (97):

Tabel simplex

(97)

Baza	d	$3+2t$	$4+5t$	0	0
		a_1	a_2	a_3	a_4
a_3	$8+t$	$2+2t^*$	$3+4t$	1	0
a_4	$9+2t$	$5+t$	$2+3t$	0	1
z_j-c_j	0	-3 $-2t$	-4 $-5t$	0	0
a_1	$\frac{8+t}{2+2t}$	1	$\frac{3+4t}{2+2t}$	$\frac{1}{2+2t}$	0
a_4	$\frac{3t^2+9t-22}{2+2t}$	0	$\frac{2t^2-13t-11^*}{2+2t}$	$-\frac{5+t}{2+2t}$	1
z_j-c_j	$\frac{(8+t)(3+2t)}{2+2t}$	0	$\frac{1-2t^2}{2+2t}$	$\frac{3+2t}{2+2t}$	0
a_1	$-\frac{5t^2+16t+11}{2t^2-13t-11}$	1	0	$\frac{3t+2}{2t^2-13t-11}$	$-\frac{3+4t}{2t^2-13t-11}$
a_2	$\frac{3t^2+9t-22}{2t^2-13t-11}$	0	1	$-\frac{5+t}{2t^2-13t-11}$	$\frac{2+2t}{2t^2-13t-11}$
z_j-c_j	$\frac{13t^3+10t^2-108t-121}{2t^2-13t-11}$	0	0	$\frac{t^2-16t-14}{2t^2-13t-11}$	$\frac{2t^2-1}{2t^2-13t-11}$

Baza B (a_1, a_2) este optimă dacă $\bar{x}_B = B^{-1}d$ este un vector nenegativ şi dacă factorii relativi de cost $\bar{c}_3$ şi $\bar{c}_4$ sînt pozitivi. Aceste mărimi depind de t, deci trebuie studiat semnul fiecăreia dintre expresiile care constituie condiţiile de optimalitate a bazei B.

Scanned with OKEN Scanner

Componentele soluției sînt fracții raționale și variația semnelor pentru valorile reale ale parametrului t rezultă din tabelul 98, în care:

$t = -2{,}2$ și $t = -1$ sînt rădăcinile ecuației $5t^2 + 16t + 11 = 0$;

$t = -4{,}6$ și $t = 1{,}6$ sînt aproximații ale rădăcinilor ecuației $3t^2 + 9t - 22 = 0$;

$t = -0{,}75$ și $t = 7{,}2$ sînt aproximații ale rădăcinilor ecuației $2t^2 - 13t - 11 = 0$.

Variația semnelor pentru componentele vectorului $\bar{x}_B$

(98)

t	$-\infty$			$-4{,}6$		$-2{,}2$			-1		$-0{,}75$			$1{,}6$			$7{,}2$			∞
n_1	−	−	−	−	−	0	+	+	0	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	
n_2	+	+	+	0	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+		
N	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	0	+	+				
x_1	−	−	−	−	−	+	+	−	−	+	+	+	−	−	−					
x_2	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	+	−	−	+	+	+				

În tabelul 98 s-a notat cu n_1, n_2 și N numărătorii și numitorul componentelor soluției asociate bazei $B(a_1, a_2)$. Din analiza semnelor rezultă că vectorul soluției $\bar{x}_B$ este nenegativ pentru $-0{,}75 \leqslant t \leqslant 1{,}6$.

Se alcătuiește tabelul (99) pentru semnele expresiilor $\bar{c}_3$ și $\bar{c}_4$ în baza $B(a_1, a_2)$. Rădăcinile aproximative sînt:

$t = -0{,}8$ $t = 16{,}8$ pentru $t^2 - 16t - 14 = 0$;

$t = -0{,}7$, $t = 0{,}7$ pentru $2t^2 - 1 = 0$.

Variația semnelor pentru $\bar{c}_3$ și $\bar{c}_4$

Scanned with OKEN Scanner

(99)

t	$-\infty$			$-0{,}8$		$-0{,}75$			$-0{,}7$			$0{,}7$		$7{,}2$			$16{,}8$		$+\infty$
n_1'	+	+	+	0	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+		
n_2'	+	+	+	+	+	+	+	+	0	−	0	+	+	+	+	+	+		
N	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+		
$\bar{c}_3$	+	+	+	−	−	+	+	+	+	+	+	−	+	+					
$\bar{c}_4$	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+	−	+	+	+	+				

Din tabelul (99) rezultă că factorii relativi de cost sînt nenegativi pentru $t \leqslant -0{,}8$; $-0{,}7 \leqslant t \leqslant 0{,}7$ și $t \geqslant 16{,}8$.

În concluzie, baza B (a_1, a_2) este optimă pentru $-0{,}7 \leqslant t \leqslant 0{,}7$.

Dacă $t > 0{,}7$, $\bar{c}_4$ devine negativ, dar ambele componente ale soluției rămîn pozitive. Determinarea vectorului care iese din bază este dificilă, deci trebuie analizate bazele formate din (a_1, a_4) și din (a_2, a_4). Vectorii (a_1, a_4) constituie baza primei iterații din tabelul (97). Pentru studiul variației de semn a componentelor soluției $\bar{x}_{B*}$ (x_1^*, x_4^*) se calculează rădăcinile

$t = -8$ pentru $t + 8 = 0$;
$t = -4{,}6$, $t = 1{,}6$ pentru $3t^2 + 9t - 22 = 0$;
$t = -1$ pentru $2t + 2 = 0$.

Variația semnelor pentru componentele vectorului $\bar{x}_{B*}$ (100)

t	$-\infty$			-8			$-4{,}6$					-1			$1{,}6$					$+\infty$
f_1	−	−		0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
f_2	+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+			
F	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+			
x_1^*	+	+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+				
x_4^*	−	−	−	−	−	−	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+				

Scanned with OKEN Scanner

În tabelul (100) s-au notat cu f_1, f_2, F numărătorii și numitorul componentelor soluției asociate bazei $B^*(a_1,a_4)$. Din acest tabel reiese că $x_1^* > 0$ și $x_4^* > 0$ pentru $t \geqslant 1{,}6$.

Variația semnelor pentru c_2^* și c_3^* **(101)**

t	$-\infty$		$-1{,}5$			-1			$-0{,}7$				$+0{,}7$					$+\infty$
f_1^1	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+		0	−	−	−	−	−
f_2^1	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
F	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
c_2^*	+	+		+	+		−	−		+	+	+		−	−	−	−	
c_3^*	+	+		−	−		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	

În tabelul (101) s-au notat cu f_1^1, f_2^1 și F numărătorii și numitorul factorilor relativi de cost c_2^* și c_3^* care sînt simultan nenegativi pentru $t \leqslant -1{,}5$ și $-0{,}7 \leqslant t \leqslant 0{,}7$.

Din tabelele (100) și (101) rezultă că nu există valori ale parametrului t pentru care să fie îndeplinite atît condițiile de nenegativitate a soluției, cît și a factorilor relativi de cost, deci B^* nu este baza optimă pentru nici o valoare a parametrului t.

Analizăm acum soluția asociată bazei B^{**} (a_2,a_4). Componentele soluției în această bază pot fi calculate din tabelul simplex inițial, introducînd în bază vectorul a_2 în locul vectorului a_1. Avem

$$x_2^{**} = \frac{8+t}{3+4t}; \qquad x_4^{**} = \frac{5t^2+16t+11}{3+4t}$$

și

$$\bar{c}_1^{**} = \frac{2t^2-1}{3+4t}; \qquad \bar{c}_3^{**} = \frac{4+5t}{3+4t}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se alcătuiesc apoi tabele pentru determinarea semnelor acestor mărimi.

Variația semnelor pentru x_2^{**} și x_4^{**}

(102)

t	$-\infty$				-8			$-2,2$			-1			$-0,75$			$+\infty$
p_1	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
p_2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
P	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x_2^{**}	$+$	$+$	$+$	$+$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
x_4^{**}	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$		$-$	$-$		$+$	$+$	$+$

Ambele componente ale soluției sînt nenegative pentru $t \geqslant -0,75$.

Variația semnelor pentru $\bar{c}_1^{**}$ și $\bar{c}_3^{**}$

(103)

t	$-\infty$					$-0,8$		$-0,75$		$-0,7$			$0,7$				$+\infty$
p'_1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	
p'_2	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
P	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\bar{c}_1^{**}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$		$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$	$+$
$\bar{c}_3^{**}$	$+$	$+$		$-$	$-$			$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$	$+$

Factorii relativi de cost sînt simultan nenegativi pentru $-0,75 \leqslant t \leqslant -0,70$ și $t \geqslant 0,70$, deci B^{**} (a_2, a_4) este optimă pentru aceste valori ale parametrului.

Rezumînd rezultatele găsite avem:

$B^{**}(a_2,a_4)$ este optimă pentru $t \in [-0{,}75\,;\ -0{,}7]$;
$B\ \ (a_1,a_2)$ este optimă pentru $t \in [-0{,}7\,;\ 0{,}7]$;
$B^{**}(a_2,a_4)$ este optimă pentru $t \in [0{,}7\,;\ +\infty)$.

Dacă t ia valori pe toată mulțimea numerelor reale, studiul trebuie continuat pentru $t < -0{,}75$.

2. Studiul sensibilității valorii optime

În toate problemele de programare parametrică s-a observat că o soluție este optimă numai pentru un anumit interval de variație a parametrului. Valoarea funcției obiectiv în problemele parametrizate este și ea funcție de parametru. Dezvoltarea în serie Taylor a funcției obiectiv dă posibilitatea de a studia variația „costului total" în vecinătatea valorii optime. Dezvoltarea în serie devine practic utilizabilă dacă derivatele funcției obiectiv sînt exprimate numai în funcție de coeficienții modelului inițial. Th. Soaty [65] a stabilit expresia primei derivate a funcției z cu ajutorul coeficienților modelului inițial.

Fie B baza formată din primii m vectori ai matricei A, $\bar{x} = B^{-1}b$ soluția problemei (P) formulată în (III.5.1) și $\bar{u} = c_B B^{-1}$ soluția problemei (D). Se știe că un cuplu de soluții duale $(\bar{x},\bar{u})$ este optim dacă $\min z = \max v$, deci B este bază optimă dacă

$$z = c_* \bar{x} = \bar{u} b = v, \tag{III.5.9}$$

unde c_* este vectorul format din primele m componente ale vectorului c.

Dacă toți coeficienții modelului sînt funcții de parametrul t atunci și z este funcție de t. Derivata valorii funcției obiectiv

$$z = c_* B^{-1} b \tag{III.5.10}$$

în raport cu parametrul t este

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dc_*}{dt} B^{-1} b + c_* \frac{dB^{-1}}{dt} b + c_* B^{-1} \frac{db}{dt}. \tag{III.5.11}$$

Din definiția inversei unei matrice avem

$$B^{-1} B = E, \tag{III.5.12}$$

unde E este matricea unitate. Derivînd (III.5.12) în raport cu t găsim

$$\frac{dB^{-1}}{dt} B + B^{-1} \frac{dB}{dt} = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că derivata inversei matricei B, în funcție de derivata matricei B, este

$$\frac{dB^{-1}}{dt} = -B^{-1}\frac{dB}{dt}B^{-1} \tag{III.5.13}$$

Înlocuind în (III.5.11) rezultatul din (III.5.13) avem

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dc_*}{dt}B^{-1}b - c_*B^{-1}\frac{dB}{dt}B^{-1}b + c_*B^{-1}\frac{db}{dt}. \tag{III.5.14}$$

Ținînd seama că $c_*B^{-1} = \bar{u}$ și $B^{-1}b = \bar{x}$, derivata funcției obiectiv se mai poate scrie sub forma

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dc_*}{dt}\bar{x} - \bar{u}\frac{dB}{dt}\bar{x} + \bar{u}\frac{db}{dt}, \tag{III.5.15}$$

în care $\frac{dz}{dt}$ este exprimată în funcție de elementele modelului inițial și de soluțiile problemelor (P) și (D) corespunzătoare bazei B.

Pe de altă parte, z poate fi considerat ca depinzînd de t prin intermediul funcțiilor $a_{ij}(t)$; $c_j(t)$ și $b_i(t)$. Derivata totală a lui z, privită ca funcție compusă, este

$$\frac{dz}{dt} = \sum_j \frac{\partial z}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt} + \sum_{i,j=1}^{m,n}\frac{\partial z}{\partial a_{ij}}\frac{da_{ij}}{dt} + \sum_i \frac{\partial z}{\partial b_i}\frac{db_i}{dt}. \tag{III.5.16}$$

Evident că derivata funcției z dată de formula (III.5.15) trebuie să fie identică cu cea dată de formula (III.5.16).

Pentru primul și ultimul termen este ușor de văzut că avem

$$\frac{dc_*}{dt}\bar{x} = \sum_j \frac{\partial z}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt} \tag{III.5.17}$$

și

$$\bar{u}\frac{db}{dt} = \sum_i \frac{\partial z}{\partial b_i}\frac{db_i}{dt} \tag{III.5.18}$$

În adevăr, din egalitatea (III.5.9) se deduce

$$\frac{dz}{dc_*} = \bar{x} \qquad \text{și} \quad \frac{dz}{db} = \bar{u}, \tag{III.5.19}$$

rezultat care justifică egalitățile (III.5.17) și (III.5.18).

Identificînd termenii mijlocii din expresiile (III.5.16) și (III.5.15) avem

$$\sum_{i,j=1}^{m,n}\frac{\partial z}{\partial a_{ij}}\frac{da_{ij}}{dt} = -\bar{u}\frac{dB}{dt}\bar{x}. \tag{III.5.20}$$

Se poate dovedi că

$$\bar{u}\frac{dB}{dt}\bar{x} = \bar{u}\frac{dA}{dt}\bar{x}. \qquad \text{(III.5.21)}$$

În adevăr, membrul întîi al egalității (III.5.21) se scrie dezvoltat astfel:

$$\bar{u}\frac{dB}{dt}\bar{x} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)\begin{vmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial t} & \ldots & \frac{\partial a_{1m}}{\partial t} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial t} & \ldots & \frac{\partial a_{mm}}{\partial t} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\bar{u}_1\frac{\partial a_{11}}{\partial t} + \ldots + \bar{u}_m\frac{\partial a_{m1}}{\partial t}; \ldots; \bar{u}_1\frac{\partial a_{1m}}{\partial t} + \ldots + \bar{u}_m\frac{\partial a_{mm}}{\partial t}\right)\begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\bar{u}_1\frac{\partial a_{11}}{\partial t} + \ldots + \bar{u}_m\frac{\partial a_{m1}}{\partial t}\right)\bar{x}_1 + \ldots + \left(\bar{u}_1\frac{\partial a_{1m}}{\partial t} + \ldots + \bar{u}_m\frac{\partial a_{mm}}{\partial t}\right)\bar{x}_m.$$

Dezvoltînd și membrul al doilea al egalității (III.5.21), avem

$$\bar{u}\frac{dA}{dt}\bar{x} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m)\begin{vmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial t} & \ldots & \frac{\partial a_{1m}}{\partial t} & \ldots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial t} & \ldots & \frac{\partial a_{mm}}{\partial t} & \ldots & \frac{\partial a_{mn}}{\partial t} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\bar{u}_1\frac{\partial a_{11}}{\partial t} + \ldots + \bar{u}_m\frac{\partial a_{m1}}{\partial t}; \ldots; \bar{u}_1\frac{\partial a_{1m}}{\partial t} + \ldots + \bar{u}_m\frac{\partial a_{mm}}{\partial t}; \ldots;\right.$$

$$\left.\bar{u}_1\frac{\partial a_{1n}}{\partial t} + \ldots + \bar{u}_m\frac{\partial a_{mn}}{\partial t}\right)\begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\bar{u}_1\frac{\partial a_{11}}{\partial t} + \ldots + \bar{u}_m\frac{\partial a_{m1}}{\partial t}\right)\bar{x}_1 + \ldots + \left(\bar{u}_1\frac{\partial a_{1m}}{\partial t} + \ldots + \bar{u}_m\frac{\partial a_{mm}}{\partial t}\right)\bar{x}_m + 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ultimii $(n - m)$ termeni se anulează, deoarece ultimele $(n - m)$ componente ale vectorului soluţie $\bar{x}$ sînt nule, ceea ce dovedeşte valabilitatea egalităţii (III.5.21). Cu acest rezultat egalitatea (III.5.20) poate fi scrisă :

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} \frac{\partial z}{\partial a_{ij}} \cdot \frac{da_{ij}}{dt} = -\bar{u}\frac{dA}{dt}\bar{x} = -\frac{dz}{db} \cdot \frac{dA}{dt} \cdot \frac{dz}{dc_*}$$

şi derivata totală a funcţiei z este

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial c_j}\frac{dc_j}{dt} - \sum_{i,j=1}^{m,n} \frac{\partial z}{\partial b_i}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial c_j} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial b_i}\frac{db_i}{dt}. \qquad \text{(III.5.22)}$$

În această ultimă formă, derivata funcţiei obiectiv se exprimă numai cu ajutorul datelor iniţiale, deci îşi păstrează valabilitatea pentru studiul funcţiei în vecinătatea oricărei valori critice a parametrului t.

Dezvoltarea funcţiei obiectiv în serie Taylor comportă însă şi cunoaşterea derivatelor de ordin superior. Problema exprimării acestor derivate cu ajutorul coeficienţilor modelului iniţial este încă o problemă deschisă.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

PROBLEME DE TIP TRANSPORT CU PARAMETRI

§ 1. INTRODUCERE

Problemele cunoscute sub denumirea de probleme de transport au următorul conţinut economic : în m centre de producţie sau depozite există cantităţile a_i ; $i \in M = \{1, 2, ..., m\}$ dintr-o anumită marfă, iar în n centre de consum sînt cerute cantităţile b_j ; $j \in N = \{1, 2, ..., n\}$ din această marfă. Fiind cunoscute cheltuielile c_{ij} necesare pentru a transporta o unitate de marfă de la producătorul (sau depozitarul) i la consumatorul j se cere planul de aprovizionare care asigură satisfacerea tuturor cererilor cu cel mai mic cost de transport.

Notînd cu x_{ij} cantitatea de marfă expediată de producătorul i consumatorului j, problema pusă se formulează astfel :

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in N} x_{ij} \leqslant a_i ; \quad i \in M, \\ &\sum_{i \in M} x_{ij} \leqslant b_j ; \quad j \in N, \qquad \text{(IV.1.1)} \\ &x_{ij} \geqslant 0 ; \\ &\min f = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}. \qquad \text{(IV.1.2)} \end{aligned}$$

Prima restricţie din sistemul (IV.1.1) impune condiţia ca totalul cantităţilor de marfă expediată de producătorul i mulţimii N a consumatorilor să nu depăşească disponibilul a_i existent ; a doua restricţie din (IV.1.1) arată că fiecare consumator este aprovizionat de centrele M de producţie cu o cantitate de marfă cel mult egală cu cererea sa. Dacă disponibilul total de marfă, $\sum_{i \in M} a_i$, poate acoperi toate cererile $\sum_{j \in N} b_j$, adică dacă

$$\sum_{i \in M} a_i > \sum_{j \in N} b_j,$$

restricţia a doua din (IV.1.1) se transformă în ecuaţie.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă totalul cererilor depăşeşte disponibilul total, adică

$$\sum_{i \in M} a_i < \sum_{j \in N} b_j,$$

atunci prima restricţie din (IV.1.1) devine ecuaţie. În sfîrşit, dacă disponibilul total este egal cu cererea totală, adică

$$\sum_{i \in M} a_i = \sum_{j \in N} b_j,$$

atunci modelul matematic al problemei de transport este

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = a_i,$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = b_j, \qquad \text{(IV.1.3)}$$

$$x_{ij} \geqslant 0;$$

$$\min f = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}, \qquad \text{(IV.1.4)}$$

cu următoarele condiţii suplimentare care asigură existenţa unei soluţii realizabile

$$a_i \geqslant 0;\ b_j \geqslant 0;\ c_{ij} \geqslant 0,\ \sum_{i \in M} a_i = \sum_{j \in N} b_j. \qquad \text{(IV.1.5)}$$

Orice problemă de transport poate fi adusă la acest model prin:

— introducerea unui producător fictiv, dacă cererea depăşeşte disponibilul şi dacă se presupune că nesatisfacerea parţială sau totală a unei cereri nu este penalizată;

— introducerea unui centru fictiv de consum, dacă producţia depăşeşte cererea şi dacă nu se ţine seama de cheltuielile făcute pentru depozitarea mărfurilor nelivrate.

Problemele de transport cu formularea (IV.1.3) pot fi prezentate sub forma unui tabel cu m linii şi n coloane, cînd există m centre producătoare şi n puncte de consum. De obicei acest tabel mai conţine o coloană suplimentară, în care se înregistrează disponibilităţile a_i şi o linie suplimentară care conţine cererile b_j. În pătratele (i, j) ale

Scanned with OKEN Scanner

tabelului se trec costurile de transport, c_{ij}. Tabelul asociat unei probleme de transport este de forma :

(104)

					u_i
	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	a_1
	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	a_2
					. . . . .
	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	a_m
v_j	b_1	b_2		b_n	

Se cunosc două clase de algoritme pentru rezolvarea problemelor de transport : o primă clasă de algoritme bazată pe metoda simplex şi a doua, pe teoria reţelelor de transport. Deoarece în literatura de specialitate în limba română sînt tratate suficient de amplu metodele de rezolvare a problemelor de transport, [3, 5, 44, 50, 57, 59, 60] în această lucrare ne vom rezuma numai la enunţarea unor rezultate care vor fi folosite în dezvoltarea acestui capitol.

Presupunînd că se cunoaşte un plan de transport, adică, în limbaj matematic, o soluţie realizabilă de bază, testul de optimalitate al acestei soluţii se poate construi scriind duala problemei (IV.1.3) — (IV.1.4).

Notînd cu u_i şi v_j variabilele duale, denumite şi multiplicatori simplex, duala problemei de transport se scrie sub forma

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij}\,; \quad i, j, \in M, N,$$

$$u_i, v_j \text{ oarecare}\,; \tag{IV.1.6}$$

$$\max g = \sum_{i \in M} a_i u_i + \sum_{j \in N} b_j v_j.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din proprietățile soluțiilor optime ale problemelor duale se deduce că soluția $X^0 = \{x_{ij}^0\}$ este optimă dacă

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ pentru toți } x_{ij} \neq 0 \text{ sau } x_{ij} \in X^0, \qquad \text{(IV.1.7)}$$

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij} \text{ pentru orice } x_{ij} = 0 \text{ sau } x_{ij} \notin X^0. \qquad \text{(IV.1.8)}$$

Ecuațiile (IV.1.7) formează un sistem triunghiular cu $(m + n - 1)$ ecuații și $(m + n)$ necunoscute. Dînd o valoare arbitrară uneia dintre necunoscute, celelalte se calculează din sistemul (IV.1.7). Dacă valorile multiplicatorilor u_i și v_j astfel determinate satisfac toate inegalitățile (IV.1.8), soluția X^0 este optimă. Dacă există $c_{ij} - u_i - v_j <$, < 0 soluția se poate îmbunătăți introducînd în bază variabila x_{pq} pentru care

$$c_{pq} - u_p - v_q = \min_{i,j \in M,N} (c_{ij} - u_i - v_j).$$

După ce s-a determinat variabila care intră în bază se construiește un ciclu cu un vîrf în pătratul (p,q) și celelalte în pătratele ocupate de variabilele din bază. Valoarea variabilei x_{pq} se determină respectînd următoarele condiții:

— noua soluție să rămînă o soluție de bază, adică să conțină numai $(m + n - 1)$ valori nenule;

— soluția să fie realizabilă, adică toate variabilele din bază să fie nenegative.

Oricărei probleme de transport i se poate asocia un graf pe care îl vom nota $G(P_1, P_2, U)$, în care:

— mulțimea nodurilor P_1 reprezintă mulțimea centrelor de producție;

— mulțimea nodurilor P_2 reprezintă mulțimea punctelor de consum;

— mulțimea arcelor U reprezintă drumurile care leagă centrele de producție cu punctele de consum.

Problema de transport este reprezentată complet de graful $G(P_1, P_2, U)$, dacă:

— fiecărui nod $p_i \in P_1$ i se asociază un disponibil a_i;

— fiecărui nod $p_j \in P_2$ i se asociază o cerere b_j;

— fiecărui arc $u_{ij} \in U$ i se asociază un număr $c_{ij} \geqslant 0$, care poate reprezenta fie costul transportului unei unități de marfă din punctul i în punctul j, fie timpul necesar pentru a parcurge distanța de la nodul i la nodul j.

Scanned with OKEN Scanner

O reprezentare a grafului $G(P_1,P_2,U)$ asociat problemei de transport cu modelul (IV.1.3) este dată în fig. 10.

Orice soluţie nedegenerată de bază a unei probleme de transport $m + n$ dimensională avînd $m + n - 1$ valori nenule este un arbore din graful $G(P_1,P_2,U)$. Se demonstrează cu uşurinţă următoarea

Teoremă. Există o corespondenţă biunivocă între mulţimea bazelor unei probleme de transport şi mulţimea arborilor care sînt grafi parţiali ai grafului $G(P_1,P_2,U)$ asociat acestei probleme.

În adevăr, numărul bazelor unei probleme de transport $m \times n$ este egal cu numărul determinanţilor nenuli de ordinul $m + n - 1$

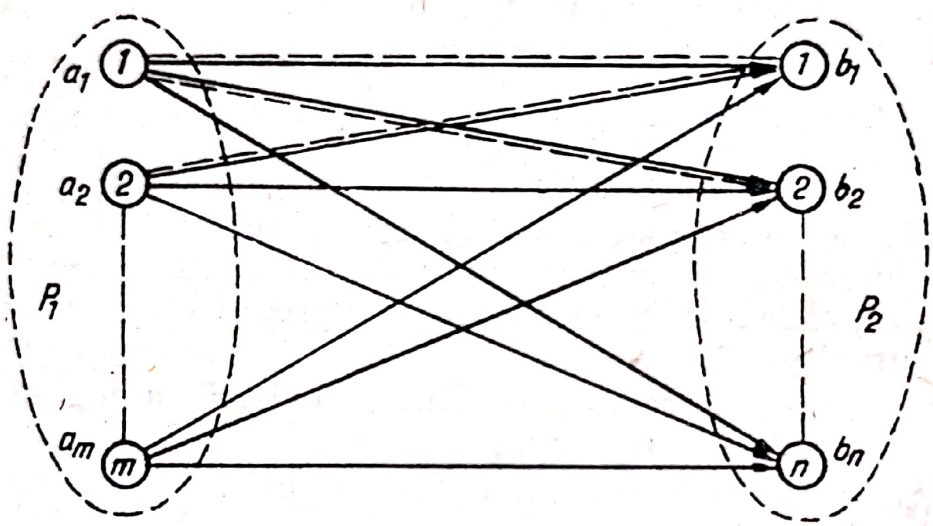


Fig. 10

care se pot forma din matricea problemei. Această matrice are $m + n - 1$ linii liniar independente şi $m \times n$ coloane. Numărul determinanţilor nenuli de ordinul $m + n - 1$ care se pot forma din această matrice [70] este egal cu $m^{n-1} \cdot n^{m-1}$ şi acest număr este în acelaşi timp egal cu al arborilor grafului G.

De aici rezultă că orice soluţie de bază poate fi construită pe graful unei probleme. Dacă două baze diferă printr-o singură variabilă, arborii asociaţi acestor baze diferă printr-un singur arc. Să admitem că dispunem de un plan de transport într-o problemă cu 3 depozite şi 5 puncte de consum. Un astfel de plan este redat prin graful din fig. 11.

În situaţia în care se impune includerea transporturilor de la depozitul 2 la consumatorul 1, noul plan trebuie să corespundă de

Scanned with OKEN Scanner

asemenea unei soluții de bază, deci graful asociat este tot un arbore. Acest arbore se construiește formînd ciclul (fig.12)

$$x_{2,1} - x_{1,1} + x_{1,2} - x_{3,2} + x_{3,4} - x_{2,4}$$

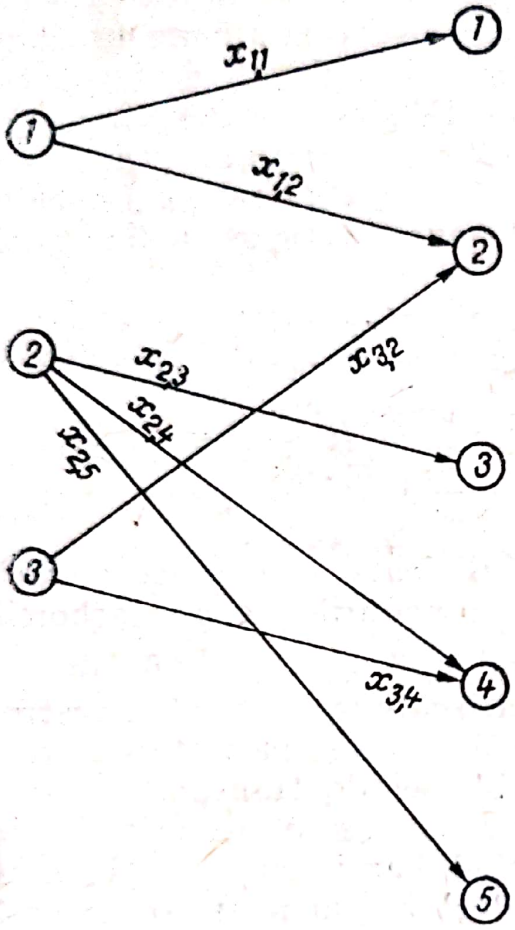


Fig. 11

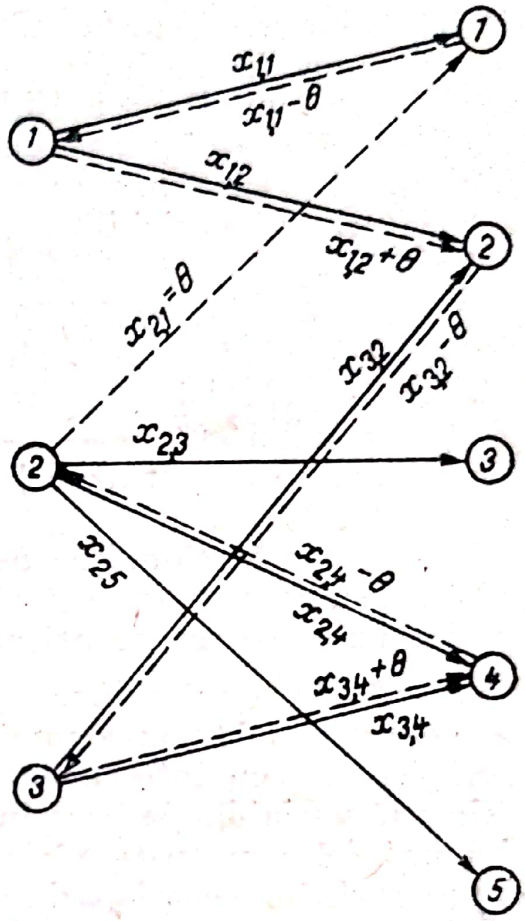


Fig. 12

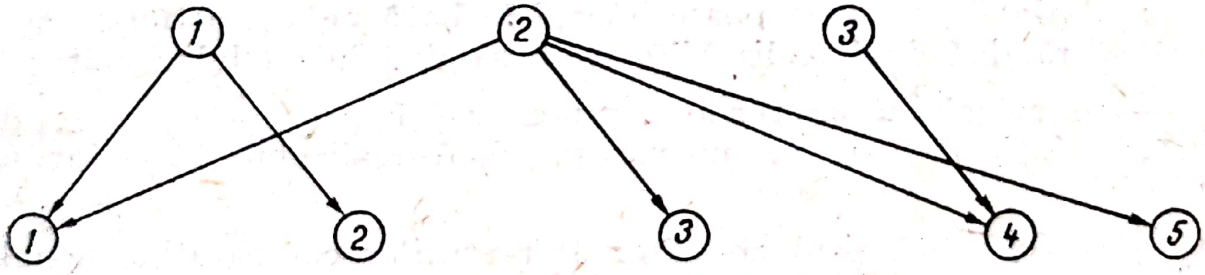


Fig. 13

și arcul care se șterge este dat de condiția ca valorile variabilelor $x_{1,1}$, $x_{3,2}$ și $x_{2,4}$ în noua bază să rămînă nenegative. Dacă

$$\min\,(x_{1,1}, x_{3,2}, x_{2,4}) = x_{3,2},$$

graful noii baze este cel redat în fig. 13.

Se știe că ciclul prin care se decide excluderea din bază a variabilei x_{pq} este unic determinat, o dată ce s-a stabilit variabila care intră în bază.

Să considerăm acum problema care se pune în aplicarea algoritmului simplex dual. Se știe că pentru a folosi acest algoritm trebuie să dispunem de o soluție dual realizabilă, adică de o soluție pentru care sînt îndeplinite condițiile (IV.1.7) — (IV.1.8). Dacă toate variabilele x_{ij} din bază sînt nenegative, soluția este optimă. Dacă una dintre variabilele bazei x_{pq} este negativă, aceasta trebuie înlocuită în bază printr-o variabilă x_{rs}, astfel încît noua soluție să rămînă dual-realizabilă.

Fie $x_{pq} = -\alpha$. Variabila x_{rs} intră în bază cu o valoare pozitivă, dacă și numai dacă în ciclul sau lanțul format pentru schimbarea bazei arcele (pq) și (rs) sînt parcurse în același sens. În adevăr, în acest caz luînd $x_{pq} = -\alpha + \theta$ avem $x_{rs} = \theta$ și $\theta = \alpha$, pentru ca noua soluție să conțină cel mult $m + n - 1$ valori nenule.

Teoremă. Condiția necesară și suficientă pentru ca o variabilă x_{pq} să poată fi exclusă din bază este ca nodurile p și q în arborele asociat bazei să nu fie atîrnate.

În adevăr, dacă nodul p sau q este atîrnat, nu se poate construi un ciclu prin adăugarea unui singur arc de aceeași paritate cu arcul (pq). Cu alte cuvinte, dacă tabelul problemei de transport conține o singură variabilă de bază în linia p sau coloana q, nu se poate forma nici un ciclu cu toate vîrfurile aparținînd bazei, cu excepția unui singur vîrf de aceeași paritate cu $(pq,)$ deci x_{pq} nu poate fi exclusă din bază.

Să admitem că nici p, și nici q nu sînt vîrfuri atîrnate în arborele bazei. Variabila x_{rs} care poate înlocui în bază pe x_{pq}, astfel ca noua bază să rămînă dual realizabilă, se determină în modul următor:

— se calculează prețurile comparative $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$; deoarece soluția de care dispunem este dual realizabilă, $\bar{c}_{ij}$ sînt nenegative;

— se formează șirul crescător al prețurilor comparative nenule, adică pentru $ij \notin B$; dacă $\bar{c}_{i_1j_1} \leqslant \bar{c}_{i_2j_2} \leqslant \ldots \leqslant \bar{c}_{i_sj_s}$ este acest șir, se știe că pentru orice (i_kj_k) care nu aparține bazei există un ciclu unic determinat care are toate celelalte elemente aparținînd bazei;

— se analizează ciclul format pentru (i_1j_1); dacă acest ciclu conține elementul (pq) de aceeași paritate cu (i_1j_1), variabila $x_{i_1j_1}$ înlocuiește pe x_{pq} în bază; dacă ciclul format nu satisface condiția re-

feritoare la paritatea elementelor, se studiază ciclul pentru (i_2, j_2) etc., deci

x_{pq} este înlocuită în bază de $x_{i_* j_*}$ dacă

$\bar{c}_{i_* j_*} = \min\{\bar{c}_{ij}, (ij) \notin B\}$

şi dacă ciclul format pentru $(i_* j_*)$ conţine elementul (pq) de aceeaşi paritate cu $(i_* j_*)$

Algoritmul propus nu necesită calcule suplimentare, deoarece preţurile comparative $\bar{c}_{ij}$ sînt calculate pentru orice soluţie, astfel încît ordonarea lor în şir crescător nu prezintă dificultăţi.

Exemplul 1. Soluţia pe care o conţine tabelul următor este dual-realizabilă, dar nu este realizabilă fiindcă $x_{1,5}$ şi $x_{2,1}$ sînt negativi. Preţurile comparative $\bar{c}_{ij}$ sînt înscrise în fiecare pătrat al tabelului care nu conţine o variabilă de bază, în colţul din stînga jos. Formarea şirului crescător al valorilor $\bar{c}_{ij}$ nu este necesară, deoarece modelul este de dimensiuni mici. Avem $\bar{c}_{2,2} = \bar{c}_{2,4} = \bar{c}_{3,2} = 0$. Formăm ciclurile pentru fiecare din elementele corespunzătoare acestor preţuri comparative. Pentru $x_{2,2}$ avem :

Tabelul soluţiei dual-realizabile **(105)**

						a_i / u_i
	2 / 8	30 / 7	1 / 9	50 / 2	−20 / 6	60 / 0
	−10 / 5	0 / 6	40 / 7	0 / 1	3 / 8	30 / −1
	80 / 7	0 / 8	1 / 10	1 / 4	40 / 7	120 / 1
b_j	70	30	40	50	20	
v_j	6	7	8	2	6	

$$(2,2) - (1,2) + (1,5) - (3,5) + (3,1) - (2,1)$$

În acest ciclu elementul (1,5) este de aceeaşi paritate cu (2,2), dar elementul (2,1) este de paritate diferită. Dacă se ia $x_{2,2} = 20$, atunci $x_{1,5} = 0$, dar $x_{2,1} = -30$. Ciclul pentru $x_{2,4}$ este

$$(2,4) - (1,4) + (1,5) - (3,5) + (3,1) - (2,1)$$

Scanned with OKEN Scanner

și prezintă același dezavantaj ca precedentul. Pentru $x_{3,2}$ avem

$$(3,2) - (1,2) + (1,5) - (3,5).$$

În acest ciclu elementele (3,2) și (3,5) au aceeași paritate. Luînd $x_{3,2} = 20$ obținem următoarea soluție care este tot dual-realizabilă:

(106)

						a_i / u_i
	10		50		60	
2 8	7	1 9	2	0 6	−1	
−10		40			30	
5	0 6	7	0 1	3 8	−2	
80	20			20	120	
7	8	1 10	1 4	7	0	
70	30	40	50	20		b_j
7	8	9	3	7		v_j

dar nu este realizabilă deoarece $x_{2,1} = -10$. Prețurile comparative $\bar{c}_{1,5} = \bar{c}_{2,2} = \bar{c}_{2,4} = 0$. Ciclul pentru $x_{1,5}$ este

$$(1,5) - (1,2) + (3,2) - (3,5)$$

și nu include pe $x_{2,1}$, deci nu folosește la aplicarea algoritmului. Pentru $x_{2,2}$ avem ciclul

$$(2,2) - (3,2) + (3,1) - (2,1),$$

în care (2,2) nu este de aceeași paritate cu (2,1), deci și acesta este inutilizabil. Pentru $x_{2,4}$ avem ciclul

$$(2,4) - (1,4) + (1,2) - (3,2) + (3,1) - (2,1),$$

în care de asemenea elementele (2,4) și (2,1) sînt de parități diferite. Considerăm elementele corespunzătoare prețurilor comparative $\bar{c}_{1,3} = \bar{c}_{3,3} = \bar{c}_{3,4}$. Pentru $x_{1,3}$ avem ciclul

$$(1,3) - (2,3) + (2,1) - (3,1) + (3,2) - (1,2),$$

care corespunde condițiilor de schimbare a bazei. Luînd $x_{1,3} = 10$ se găsește soluția optimă conținută în tabelul următor:

Tabelul soluției optime

(107)

						a_i / u_i
	2 8	0 7	10 9	50 2	0 6	60 0
	1 5	1 6	30 7	1 1	4 8	30 −2
	70 7	30 8	0 10	1 4	20 7	120 1
b_j	70	30	40	50	20	
v_j	6	7		2	6	

În practică se pun uneori probleme de transport (sau care pot fi aduse la forma matematică a acestor probleme) în care coeficienții c_{ij}, a_i și b_j, în totalitatea lor sau în parte, sînt funcții de unul sau mai mulți parametri. Pentru cazurile reale în care apar aceste situații, variația parametrilor este îngăduită între limite finite și determinate de natura problemei.

Rezolvarea problemelor de transport parametrizate comportă:

— determinarea soluției optime pentru o valoare sau un sistem de valori atribuit parametrilor;

— stabilirea intervalului sau domeniului de variație a parametrilor pentru care soluția își păstrează caracterul de optimalitate;

— reoptimizarea soluției în afara intervalului sau domeniului de optimalitate.

În cele ce urmează ne propunem să tratăm cîteva exemple de parametrizare în probleme de transport, din care, prin generalizări, să se stabilească metodele de rezolvare a acestor clase de probleme.

§ 2. TRANSPORTURI CU COSTURI VARIABILE

Pentru exemplificarea cazului de parametrizare a coeficienților într-o problemă de transport se va discuta o problemă de organizare a producției, care poate fi transformată într-un model de transporturi.

Scanned with OKEN Scanner

Să admitem că planul anual de producţie al unei întreprinderi prevede un anumit nivel de produse de un anumit tip. Să presupunem că este vorba de producţia burlanelor de foraj, pentru care planul anual prevede n unităţi, dar livrările lunare trebuie să fie n_i ($i = 1, \ldots, 12$). Capacitatea lunară de producţie, în timp normal de lucru, este d_i, dar folosind munca de ore suplimentare se mai realizează un debit lunar d_i'. Preţul de cost pe unitatea de produs realizat în luna i în timp normal de lucru este c_i şi în ore suplimentare c_i' ($c_i' > c_i$). Costul stocării unei unităţi de produs pe timp de o lună este k. Întreprinderea doreşte să planifice producţia în aşa fel încît să asigure livrările lunare prevăzute, la un preţ de cost total minim. Prin preţ total înţelegem preţul de producţie la care se adaugă costul stocărilor.

Pentru formularea matematică a problemei notăm cu X_i ($i = 1, \ldots, 12$) numărul burlanelor de foraj produse în timp normal de lucru şi cu X_i' ($i = 1, \ldots, 12$) numărul celor produse în ore suplimentare.

Condiţiile problemei sînt:

$$\begin{aligned} X_i &\leqslant d_i; \quad i = 1, \ldots, 12, \\ X_i' &\leqslant d_i'; \quad i = 1, \ldots, 12. \end{aligned} \tag{IV.2.1}$$

Aceste inegalităţi exprimă restricţiile legate de capacitatea de producţie a întreprinderii:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i + \sum_{i=1}^{p} X_i' - \sum_{i=1}^{p} n_i = s_{p+1}; \quad p = 2, \ldots, 11. \tag{IV.2.2}$$

În relaţiile (IV.2.2) s-a notat cu s_{p+1} stocul din luna $p + 1$, deci prin aceste inegalităţi se arată că stocul din luna $p + 1$ este egal cu diferenţa dintre numărul unităţilor produse şi al celor livrate în lunile precedente. La condiţiile impuse se mai adaugă şi cele de nenegativitate a variabilelor:

$$X_i \geqslant 0; \; X_i' \geqslant 0; \; s_i \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, 12. \tag{IV.2.3}$$

Funcţia care exprimă obiectul urmărit este

$$\min f = \sum_{i=1}^{12} c_i X_i + \sum_{i=1}^{12} c_i' X_i' + k \sum_{i=1}^{12} s_i,$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest tip de probleme a fost formulat ca probleme de transport de H.S. Manne și E.H. Bowmann. În acest scop se consideră ca „surse" capacitatea de producție, în timp normal de lucru și în ore suplimentare, din fiecare lună. Într-o problemă care privește organizarea producției pentru l luni avem $2l$ „surse" cu capacitățile d_i și d_i' ($i = 1, \ldots, l$). Necesarul în punctele de destinație se asimilează cu cererea de produse din fiecare lună, care s-a notat cu n_i. Deoarece se presupune că pe întreaga perioadă studiată cererea este inferioară capacității de producție, se introduce o „destinație fictivă" al cărei necesar este

$$\sum_{i=1}^{l} d_i + \sum_{i=1}^{l} d_i' - \sum_{i=1}^{l} n_i.$$

Costurile care se atașază schemei de transport sînt:

— costuri nule pentru capacitățile de producție nefolosite;

— costurile c_i sau c_i' pentru o unitate de marfă produsă în luna i și livrată în aceeași lună, după cum este executată în orele de program sau în ore suplimentare;

— costul unei unități de marfă produsă în luna i și livrată în luna $j (j > i)$ este $c_i + (j - i)k$ sau $c_i' + (j - i)k$;

— costul unei unități de marfă produsă în luna i și livrată în luna $j (j < i)$ este un preț prohibitiv M ($M \geqslant 0$ și arbitrar de mare), care asigură excluderea acestor situații din soluția optimă. Notînd cu x_{ij} și x_{ij}' variabilele din problema de transport se stabilesc următoarele relații între aceste variabile și cele inițiale:

$$\sum_{j=1}^{l} x_{ij} = X_i; \quad i = 1, \ldots, l,$$
$$\sum_{i=1}^{l} x_{ij}' = X_j; \quad j = 1, \ldots, l. \tag{IV.2.4}$$

Condițiile problemei, cu noile variabile, sînt

$$\sum x_{ij} \leqslant d_i,$$
$$\sum_i x_{ij}' \leqslant d_i', \tag{IV.2.5}$$
$$\sum_i \left(\sum_j x_{ij} + \sum x_{ij} - n_i\right) = s_{p+1}; \; p = 1, \ldots, (l-1),$$

iar funcţia obiectiv este

$$\min F = \sum_i c_i \sum_j x_{ij} + \sum_i c'_i \sum_j x'_{ij} + k \sum_i s_i. \qquad \text{(IV.2.6)}$$

Pentru mai multă claritate să considerăm următorul

Exemplu I. În cursul unui trimestru, o întreprindere trebuie să livreze 26 burlane de foraj, livrările lunare fiind de 6, 11, 9 unităţi. Capacitatea de producţie în orele de program este de 8 bucăţi pe lună iar în ore suplimentare se mai pot produce lunar cîte 3 burlane. Preţul de cost al unui burlan produs în orele de program este de 5 unităţi băneşti, iar în orele suplimentare, preţul de cost al acestuia este de .

$7 + \lambda$ în prima lună ;

$7 - \lambda$ în luna a doua ;

$7 + 3\lambda$ în luna a treia,

λ fiind un parametru care poate lua valori în intervalul $[-0{,}5\,;\ 2]$. Costul depozitării unei unităţi de produs este de o unitate bănească pe timp de o lună.

Problema este parametrizată din cauza costului producţiei realizate în ore suplimentare. Rezolvarea problemei constă în determinarea soluţiei optime pentru $\lambda = 0$ şi a soluţiilor optime corespunzătoare intervalelor de variaţii ale parametrului.

Capacitatea totală de producţie în cursul trimestrului este de $3 \times 8 + 3 \times 3 = 33$ unităţi, deci depăşeşte cererea cu $33 - 26 = 7$ unităţi.

Tabelul problemei de transport conţine $3 \times 2 = 6$ coloane, corespunzînd posibilităţilor de producţie în orele de program şi în orele suplimentare, în cursul celor 3 luni ale trimestrului ; 4 linii corespunzînd cererii din fiecare lună a trimestrului, la care se adaugă „cererea" suplimentară de 7 unităţi necesară echilibrului impus de condiţia $\sum_i a_i = \sum_j b_j$.

Costurile din pătratele tabelului s-au calculat astfel :

— pentru producţia primei luni care se livrează în aceeaşi lună costul este de 5, respectiv 7 unităţi băneşti ;

— pentru producţia primei luni care se livrează în luna a doua costul se majorează cu 1 unitate (costul depozitării) ; pentru livrările făcute în luna a treia majorarea este de 2 unităţi ;

— producţia din luna a doua sau a treia, care se livrează în prima lună este afectată de un cost prohibitiv M ;

— costurile asociate capacităţii de producţie nefolosite sînt nule.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\lambda = 0$ soluția inițială construită prin metoda colțului nord-vest este următoarea:

Soluția inițială pentru $\lambda = 0$ **(108)**

	← luna 1ª → N	S	← luna 2ª → N	S	← luna 3ª → N	S	Cerere în	
	[6] 5	7	M	M	M	M	6 $u_1 = -1$	luna 1
	[2] 6	[3] $-\theta \rightarrow$ $\uparrow$ 8	[6] $+\theta$ $\downarrow$ 5	7	M	M	11 $u_2 = 0$	luna a 2-a
	7	9	[2] $-\theta$ 6	[3] $\rightarrow$ 8	[4] $+\theta$ $\downarrow$ 5	7	9 $u_3 = 1$	luna a 3-a
	-2 0	$\theta \leftarrow$ -4 0	-1 0	-3 0	[4] $-\theta$ 0	[3] 0	7 $u_4 = -4$	fictivă
Capacitate de producție	8 $v_1 = 6$	3 $v_2 = 8$	8 $v_3 = 5$	3 $v_4 = 7$	8 $v_5 = 4$	3 $v_6 = 4$		

După patru iterații se obține soluția optimă, care este:

Soluția optimă pentru $\lambda = 0$ **(109)**

							a_i	u_i
	[6] 5	$7+\lambda$	M	M	M	M	6 $6-\lambda$	
	[2] $-\theta \rightarrow$ 6	$8+\lambda$	[8] $\rightarrow$ 5	[1] $+\theta$ $\downarrow$ $7-\lambda$	M	M	11 $7-\lambda$	
	$\theta \leftarrow$ * 7	$9+\lambda$	* 6	* $8-\lambda$	[8] 5	[1] $-\theta$ $7+3\lambda$	9 $7+3\lambda$	
	[3] 0	0	0	[2] $-\theta \rightarrow$ 0	0	[2] $+\theta$ 0	7 0	
b_j	8	3	8	3	8	3		
v_j	$\lambda-1$	0	$\lambda-2$	0	$-3\lambda-2$	0		

Notă: Iterația construită pe acest tabel se referă la $\lambda \neq 0$.

Pentru determinarea intervalului de variaţie a parametrului λ în care soluţia găsită rămîne optimă, s-au înlocuit costurile constante cu cele parametrizate şi s-au calculat multiplicatorii simplex u_i ($i = 1, \ldots, 6$) şi v_j ($j = 1, \ldots 4$) pentru aceste costuri. Se ştie că soluţia unei probleme de transport este optimă dacă $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \geqslant 0$ pentru toate pătratele tabelului care nu conţin valori nenule ale variabilelor, adică pentru toate variabilele x_{ij} care nu aparţin bazei. În exemplul studiat avem $\bar{c}_{1,2} = \bar{c}_{2,2} = 1 + 2\lambda$; $\bar{c}_{3,1} = \bar{c}_{3,3} = \bar{c}_{3,4} = 1 - 4\lambda$; $\bar{c}_{3,2} = 2 - 2\lambda$; $\bar{c}_{4,1} = 1 - \lambda$; $\bar{c}_{4,3} = 2 - \lambda$ $\bar{c}_{4,5} = 2 + 3\lambda$ şi toţi ceilalţi $\bar{c}_{ij} \geqslant 0$, deoarece conţin numărul M.

Condiţiile de optimalitate a soluţiei sînt satisfăcute pentru $-0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}25$.

Dacă $\lambda > 0{,}25$, devin negativi $\bar{c}_{3,1}$, $\bar{c}_{3,3}$ şi $\bar{c}_{3,4}$. Se alege apoi variabila $x_{3,1} = \theta$ şi formăm noua soluţie dată în cazul cînd $\lambda \geqslant 0{,}25$.

Tabelul optim pentru $\lambda \geqslant 0{,}25$

(110)

$\underline{6}\vert$ 5	$7+\lambda$	M	M	M	M	6 $6-\lambda$
$\underline{1}\vert - \theta$ 6	$8+\lambda$	$\underline{8}\vert$ 5	$\underline{2}\vert + \theta$ $7-\lambda$	M	M	11 $7-\lambda$
$\underline{1}\vert$ 7	$9+\lambda$	6	$8-\lambda$	$\underline{8}\vert$ 5	$7+3\lambda$	9 $8-\lambda$
$+\theta$ * 0	$\underline{3}\vert$ 0	0	$\underline{1}\vert - \theta$ 0	0	$\underline{3}\vert$ 0	7 0
8 $\lambda-1$	3 0	8 $\lambda-2$	3 0	8 $\lambda-3$	3 0	

Se determină intervalul de optimalitate a noii soluţii, rezolvînd sistemul de inecuaţii

$$\bar{c}_{1,2} = \bar{c}_{2,1} = \bar{c}_{3,2} = 1 + 2\lambda \geqslant 0; \quad \bar{c}_{3,3} = \bar{c}_{3,4} = 0; \quad \bar{c}_{3,6} = -1 + 4\lambda \geqslant 0; \quad \bar{c}_{4,1} = 1 - \lambda; \quad \bar{c}_{4,3} = 2 - \lambda \geqslant 0; \quad \bar{c}_{4,5} = 3 - \lambda \geqslant 0.$$

Acest sistem este satisfăcut pentru

$$0{,}25 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Dacă $\lambda > 1$, atunci $c_{4,1} < 0$. Luînd $x_{4,1} = \theta$ și formînd ciclul arătat în tabelul optim pentru $\lambda \geqslant 0{,}25$ se găsește o soluție degenerată ($x_{4,4} = 0$), care este optimă numai pentru $\lambda = 1$.

Soluția optimă pentru $\lambda = 1$ **(111)**

							a_i / u_j
	[6] 5	$7+\lambda$	M	M	M	M	[6] 5
	6	[8] $8+\lambda$	5	[3] $7-\lambda$	M	M	[11] $7-\lambda$
	[1] $-\theta$ 7	$9+\lambda$	6	$+\theta$ $8-\lambda$	[8] 5	$7+3\lambda$	[9] 7
	[1] $+\theta$ 0	[3] 0	0	[0] $-\theta$ 0	0	[3] 0	[7] 0
b_j	8	3	8	3	8	3	
v_j	0	0	$\lambda-2$	0	-2	0	

Factorii relativi de cost pentru această soluție sînt

$$\tilde{c}_{1,2} = \tilde{c}_{3,2} = 2 + \lambda\,; \quad \tilde{c}_{2,1} = -\tilde{c}_{3,3} = -\tilde{c}_{3,4} = -1 + \lambda\,; \quad \tilde{c}_{2,2} = 1 + 2\lambda\,;$$
$$\tilde{c}_{3,6} = 3\lambda\,; \qquad \tilde{c}_{4,3} = 2 - \lambda.$$

Condițiile de nenegativitate pentru $\tilde{c}_{ij}$ sînt satisfăcute numai pentru $\lambda = 1$. Luînd $x_{3,4} = \theta$ sau $x_{2,1} = \theta$ soluția nu se modifică, θ fiind nul deoarece soluția optimă pentru $\lambda = 1$ este degenerată.

Soluția optimă pentru $\lambda > 1$ **(112)**

							a_i / u_j
	[6] 5	$7+\lambda$	M	M	M	M	[6] 5
	6	[8] $8+\lambda$	5	[3] $7-\lambda$	M	M	[11] 6
	[1] 7	$9+\lambda$	6	[0] $8-\lambda$	[8] 5	$7+3\lambda$	[9] 7
	[1] 0	[3] 0	0	0	0	[3] 0	[7] 0
b_j	8	3	8	3	8	3	
v_j	0	0	-1	$1-\lambda$	-2	0	

Scanned with OKEN Scanner

Condiţiile de nenegativitate pentru factorii relativi de cost asociaţi ultimei soluţii sînt

$$c^*_{1,2} = c^*_{2,2} = c^*_{3,2} = 2 + \lambda \geqslant 0\,; \quad c^*_{2,1} = c^*_{3,3} = 0\,; \quad c^*_{3,6} = 3\lambda \geqslant 0\,;$$
$$c^*_{4,1} = -1 + \lambda \geqslant 0$$

şi rămîn satisfăcute pentru orice $\lambda > 1$.

Problema fiind acum complet rezolvată, soluţiile optime pentru diferitele intervale de variaţie a parametrului pot fi comparate cu uşurinţă dacă sînt prezentate în forma următoare:

Tabelul soluţiilor optime

(113)

Variaţia parametrului	Producţia în luna					
	I		II		III	
	orele de program.	ore suplimentare	N	S	N	S
$-0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}25$	8	—	8	1	8	1
$0{,}25 \leqslant \lambda \leqslant 1$	8	—	8	2	8	—
$1 \leqslant \lambda \leqslant 2$	7	—	8	3	8	—
Necesarul	6		11		9	

Din aceste soluţii se constată că, exceptînd cazul $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$, în fiecare lună se foloseşte capacitatea integrală de producţie pentru orele de program, iar producţia necesară care depăşeşte această capacitate se realizează cu precădere în luna a doua, cînd preţul de cost este mai scăzut.

Generalizare. Problemele de transport în care costurile sînt funcţii liniare de un parametru au următoarea formă:

$$\sum_j x_{ij} = a_i \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$\sum_i x_{ij} = b_j \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$x_{ij} \geqslant 0\,; \qquad \sum_i a_i \geqslant \sum_j b_j\,; \tag{IV.2.7}$$
$$\min f(\lambda) = \sum_i \sum_j c_{ij}(\lambda) x_{ij},$$

unde $c_{ij}\ (\lambda)$ sînt funcţii liniare de λ.

Scanned with OKEN Scanner

Intervalul de variație a parametrului λ este ales în așa fel încît $c_{ij}(\lambda) \geqslant 0$. Se știe că dacă este satisfăcută condiția de echilibru

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j,$$

problema de transport admite întotdeauna o soluție optimă pentru un sistem dat de prețuri, deci se poate determina soluția optimă pentru o valoare particulară a parametrului. Această valoare poate fi sau $\lambda = 0$, sau $\lambda = \underline{\lambda}$, unde s-a notat cu $\underline{\lambda}$ marginea inferioară a intervalului în care poate varia parametrul. Presupunem că s-a obținut soluția optimă a problemei de transport pentru $\lambda = 0$. Luînd acum prețurile $c_{ij}(\lambda)$ funcții de parametru, atît multiplicatorii simplex u_i, v_j, cît și costurile comparative $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ asociate variabilelor care nu aparțin bazei optime devin de asemenea funcții liniare de λ. Soluția determinată rămîne optimă pentru toate valorile parametrului care satisfac condițiile

$$\bar{c}_{ij}(\lambda) = c_{ij}(\lambda) - u_i(\lambda) - v_j(\lambda) \geqslant 0. \qquad \text{(IV.2.8)}$$

Rezolvînd sistemul de inecuații (IV.2.8) se determină valoarea minimă λ_1 și maximă λ_2 pentru care este satisfăcut criteriul de optimalitate a soluției. Fie $X^\circ = \{x_{ij}^\circ\}$ soluția optimă pentru $\lambda = 0$ și $[\lambda_1, \lambda_2]$ intervalul în care această soluție rămîne optimă. Dacă $\lambda > \lambda_2$, cel puțin un $\bar{c}_{ij}$ asociat unei variabile care nu aparține bazei devine negativ și reoptimizarea soluției se obține folosind algoritmul obișnuit pentru îmbunătățirea unui program de transport. Procesul este iterativ și continuă pînă la acoperirea întregului interval de variație a parametrului.

Se pot considera și cazurile în care c_{ij} sînt funcții liniare de mai mulți parametri sau neliniare de unul sau mai mulți parametri. Discuția și rezolvarea problemei nu se modifică în aceste cazuri. Deosebirile dintre diferitele modalități de parametrizare a elementelor c_{ij} constau numai în faptul că sistemul de inecuații (IV.2.8) este un sistem de $m \cdot n - (m + n - 1)$ inecuații:

— liniare de s parametri, dacă c_{ij} sînt funcții liniare de $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$;
— neliniare de λ și cel mult de același grad cu $c_{ij}(\lambda)$;
— neliniare de s parametri, dacă c_{ij} sînt funcții neliniare de $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$.

§ 3. TRANSPORTURI CU CERERI ȘI DISPONIBILITĂȚI VARIABILE

Presupunem că o întreprindere industrială dispune de 6 tipuri de mașini-unelte $M_1, \ldots, M_6$ și planul de producție prevede manufacturarea a 4 produse $P_1, \ldots, P_4$ în cantități determinate. Timpul în

Scanned with OKEN Scanner

care mașinile-unelte pot fi folosite pentru realizarea acestei producții depinde de un parametru, deoarece același utilaj mai este solicitat și la prelucrarea altor produse decît cele luate în considerație în această problemă. Obiectivul urmărit este planificarea repartizării sarcinilor de producție pe utilajul disponibil, în scopul realizării planului de producție în minimum de timp. Datele problemei sînt conținute în tabelul următor:

(114)

Mașina / Produsul	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	Timpul necesar pentru cantitatea planificată
P_1	12	20	—	25	—	10	2400
P_2	18	20	15	—	—	20	3000
P_3	10	—	12	15	10	—	2000
P_4	20	—	—	8	10	16	1600
Timpul disponibil	$1200-200\lambda$	2000	1600	$3000-300\lambda$	1200	$1000+100\lambda$	

Din acest tabel rezultă că pentru prelucrarea cantităților planificate din produsul P_1 sînt necesare 2 400 unități de timp (ore, minute) repartizate astfel: la mașina M_1 12 unități de timp pentru o unitate de produs; la mașina M_2 20 de unități de timp; iar la mașinile M_4 și M_6 sînt utilizate 25, respectiv 10 unități de timp pentru o unitate de produs, mașinile M_3 și M_5 nefiind folosite pentru P_1. Producția care nu intră în cadrul acestei probleme solicită mașinile M_1, M_2 și M_6 în așa fel încît timpul total în care aceste utilaje sînt disponibile depinde de parametrul λ care ia valori în intervalul $[-5;\ 2{,}5]$. Această problemă poate fi formulată matematic ca o problemă de programare liniară, dar se rezolvă mai simplu dacă se utilizează modelul problemelor de transport în care:

— timpul necesar utilajului j pentru o piesă de tip i este asimilat cu costul c_{ij};

— cererile în punctele de consum sînt asimilate cu timpul necesar pentru manufacturarea cantităților de produse planificate;

— disponibilul din depozite este asimilat cu timpul în care utilajele pot fi folosite în producția de care ne ocupăm.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă un produs nu solicită folosirea unui utilaj, costul din pătratul tabelului de transport, situat la intersecția liniei acelui produs cu coloana utilajului respectiv, este un cost prohibitiv, care va fi notat cu M.

Condiția $\sum_i a_i = \sum_j b_j$ este satisfăcută în cazul problemei de care ne ocupăm, dacă se introduce în tabel o linie suplimentară corespunzînd unui produs fictiv, care solicită $1\,000 - 400\lambda$ unități din timpul disponibil al utilajelor. Costurile din linia suplimentară sînt nule, fiindcă reprezintă folosirea mașinilor-unelte pentru un produs fictiv. Valorile nenule ale variabilelor din această linie sînt unități de timp în care un utilaj rămîne nefolosit.

Construim tabelul problemei de transport și folosim metoda elementului minim al tabelului pentru determinarea soluției inițiale. Calculînd multiplicatorii simplex u_i, $i = 1, \ldots, 5$; v_j, $j = 1, \ldots, 6$ și costurile comparative $\bar{c}_{ij}$ pentru variabilele care nu aparțin bazei, găsim că soluția inițială poate fi îmbunătățită dacă $x_{5,4}$ intră în bază cu valoarea $\theta = 600 - 200\,\lambda$.

Soluția inițială **(115)**

						a_i / u_i
	200λ $+\theta$		$1400-300\lambda$ $-\theta$		$1000+100\lambda$	2400
-1 12	20	M	25	M	10	0
	$2000-200\lambda$ $-\theta$	$1000+200\lambda$ $+\theta$				3000
18	20	15	M	M	20	0
$200+200\lambda$ $+\theta$		$600-200\lambda$ $-\theta$		1200		2000
10	M	12	-7 15	10	M	-3
			1600			1600
20	M	M	8	10	16	-17
$1000-400\lambda$ $-\theta$			θ			$1000-400\lambda$
0	-7 0	-2 0	-12 0	0	0	-13
b_j $1200-200\lambda$	2000	1600	$3000-300\lambda$	1200	$1000+100\lambda$	
v_j 13	20	15	25	13	10	

Notă. Costurile negative $\bar{c}_{ij}$ s-au înscris în colțurile din stînga, jos.

Scanned with OKEN Scanner

În iterația 4 se ajunge la soluția optimă, care este :

Iterația 4. Plan optim pentru $-2 \leqslant \lambda \leqslant 2$ **(116)**

						a_i / u_i
$1200-200\lambda$	$200+100\lambda$				$1000+100\lambda$	2400
12	20	M	(5) 25	M	10	0
	1400	1600				3000
	$+\theta$ ←	$-\theta$				
(6) 18	20	15	M	M	(10) 20	0
			800	1200		2000
		$+\theta$ ←	→ $-\theta$			
(3) 10	M	(2) 12	15	10	M	−5
			1600			1600
(20) 20	M	M	8	(7) 10	(18) 16	−12
	$400-100\lambda$		$600-300\lambda$			$1000-400\lambda$
	$-\theta$ ———		→ $+\theta$			
(8) 0	0	(5) 0	0	(5) 0	(10) 0	−20
b_j $1200-200\lambda$	2000	1600	$3000-300\lambda$	1200	$1000+100\lambda$	
v_j 12	20	15	20	15	10	

După ce s-a găsit o soluție optimă determinăm intervalul în care λ poate lua astfel de valori încît soluția să rămînă optimă. Evident că variația parametrului nu afectează mărimile c_{ij}, u_i, v_j și $\bar{c}_{ij}$, deci optimalitatea soluției depinde de nenegativitatea componentelor ei. Condițiile $x_{ij} \geqslant 0$ pentru toate variabilele din baza iterației 4 sînt :

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= 1200 - 200\lambda \geqslant 0, \\ x_{1,2} &= 200 + 100\lambda \geqslant 0, \\ x_{1,6} &= 1000 + 100\lambda \geqslant 0, \\ x_{5,2} &= 400 - 100\lambda \geqslant 0, \\ x_{5,4} &= 600 - 300\lambda \geqslant 0. \end{aligned} \qquad \text{(IV.3.1)}$$

Sistemul (IV.3.1) este satisfăcut pentru $-2 \leqslant \lambda \leqslant 2$.

Deoarece în problema enunțată parametrul poate varia între limitele -5 și 2,5 mai trebuie găsite soluțiile optime pentru $\lambda > 2$ și $\lambda < -2$. Să considerăm întîi $\lambda > 2$; în acest caz $x_{5,4} < 0$ și soluția devine nerealizabilă, dar rămîne dual-realizabilă deoarece toți $\bar{c}_{ij} \geqslant 0$. Pentru a găsi o nouă soluție optimă se folosește algoritmul dual simplex adaptat problemelor de transport. Se procedează astfel : se adaugă $\theta = 300\lambda - 600$ variabilei $x_{5,4}$. Deoarece planul de transport căutat

trebuie să fie realizabil pentru $\lambda > 2$, variabila care intră în bază trebuie să ia valoarea $+\theta$, prin urmare în ciclul format pentru schimbarea bazei variabila care iese și cea care intră în bază trebuie să fie situată în vîrfuri de aceeași paritate. Soluția obținută printr-o astfel de schimbare a bazei este optimă dacă dintre toate variabilele care candidează la intrarea în bază se alege cea care corespunde celui mai mic cost comparativ.

În problemele de dimensiuni reduse se poate proceda astfel:

— se alege cel mai mic factor relativ de cost asociat unei variabile care nu aparține bazei; fie acest factor

$$\bar{c}_{rs} = \min_{(ij) \notin B} \bar{c}_{ij};$$

— se cercetează dacă este posibilă construirea unui ciclu în care variabila exclusă din bază x_{pq} și variabila care ar trebui să intre în bază au aceeași paritate; în caz afirmativ s-a determinat schimbarea bazei și prin aceasta s-a găsit o nouă soluție optimă.

În cazul în care nu se poate forma ciclul cerut se studiază posibilitatea de formare a ciclului pentru variabila corespunzătoare

$$\min \bar{c}_{ij} \text{ pe mulțimea } (ij) \in B - (rs).$$

În problema studiată avem

$$\min \bar{c}_{ij} = c_{3,3} = 2.$$

Variabila care iese din bază este $x_{5,4}$ și se poate forma ciclul în care $x_{5,4}$ și $x_{3,3}$ au aceeași paritate. Acest ciclu este redat în tabelul iterației 4. După efectuarea modificărilor cerute găsim:

Soluția optimă pentru $2 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}5$ **(117)**

						a_i	u_i
	$1200-200\lambda$	$200+100\lambda$			$1000+100\lambda$	2400	
	12	20	M	25	M	10	0
		$800+300\lambda$	$2200-300\lambda$			3000	
	18	20	15	M	M	20	0
		$300\lambda-600$	$1400-300\lambda$	1200		2000	
	10	M	12	15	10	M	−3
			1600			1600	
	20	M	M	8	10	16	−10
		$1000-400\lambda$				$1000-400\lambda$	
	0	0	0	0	0	0	−20
b_j	$1200-200\lambda$	2000	1600	$3000-300\lambda$	1200	$1000+100\lambda$	
v_j	12	20	15	18	13	10	

Se verifică optimalitatea soluției calculînd multiplicatorii simplex și se determină intervalul de optimalitate din condițiile de nenegativitate a variabilelor bazei. Sistemul

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= 1200 - 200\lambda \geqslant 0, \\ x_{2,3} &= 2200 - 300\lambda \geqslant 0, \\ x_{3,3} &= 300\lambda - 600 \geqslant 0, \\ x_{3,4} &= 1400 - 300\lambda \geqslant 0, \\ x_{5,2} &= 1000 - 400\lambda \geqslant 0. \end{aligned} \qquad \text{(IV.3.2)}$$

este satisfăcut pentru valorile $2 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}5$, ajungîndu-se astfel la marginea superioară a intervalului de variație a parametrului. Mai trebuie cercetate soluțiile pentru $\lambda < -2$. Din sistemul (IV.3.1) rezultă că dacă $\lambda < -2$, atunci $x_{1,2} < 0$, deci această variabilă se exclude din bază. De data aceasta nu se poate forma ciclul în condițiile cerute pentru $\min \bar{c}_{ij} = \bar{c}_{33}$ și de aceea se studiază variabila care corespunde $\min \bar{c}_{ij}$ pe mulțimea $(ij) \in B - (x_{33})$. Se găsește că acest minim corespunde variabilei $x_{3,1}$, care poate înlocui pe $x_{1,2}$ în bază.

Se ia $\theta = -200 - 100\lambda$ și făcînd modificările necesare în ciclul

$$x_{1,2} - x_{1,1} + x_{3,1} - x_{3,4} + x_{5,4} - x_{5,2}$$

pe tabelul soluției optime pentru $-2 \leqslant \lambda \leqslant 2$, se găsește soluția din tabelul următor care este optimă pentru $-2 \leqslant \lambda \leqslant -10$. Variația parametrului, în condițiile date, fiind limitată la intervalul $[-5; 2{,}5]$, problema este complet rezolvată.

Soluția optimă pentru $-2 \leqslant \lambda \leqslant -5$ **(118)**

							a_i	u_i
	$1400-100\lambda$					$1000+100\lambda$	2400	
	12	20	M	25	M	10		2
		1400	1600				3000	
	18	20	15	M	M	20		5
	$-200-100\lambda$			$1000+100\lambda$	1200		2000	
	10	M	12	15	10	M		0
				1600			1600	
	20	M	M	8	10	16		-7
		600		$400-400\lambda$			$1000-400\lambda$	
	0	0	0	0	0	0		-15
b_j	$1200-200\lambda$	2000	1600	$3000-300\lambda$	1200	$1000+100\lambda$		
v_j	10	15	10	15	10	8		

Scanned with OKEN Scanner

În rezumat, calculele arată că există soluții optime diferite pentru următoarele intervale de variație a parametrului:

$$I_1 = [-5\,;\,-2] \qquad I_2 = [-2\,;\,2] \qquad I_3 = [2\,;\,2{,}5].$$

Pentru interpretarea rezultatelor să revenim la enunțarea concretă a problemei. Valoarea parametrului λ cuprinsă în intervalul $[2\,;\,2{,}5]$ înseamnă că fondul de timp disponibil pentru mașina M_1 este de 800—700 ore, pentru mașina M_4 este de 2 400 — 2 250 ore, iar pentru mașina M_6 este de 1 200—1 250 ore. În acest caz, repartizarea optimă a sarcinilor de producție este următoarea:

(119)

Produsul	Ore de funcționare a mașinii-unelte											
	M_1		M_2		M_3		M_4		M_5		M_6	
	$\lambda = 2$	$\lambda = 2{,}5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 2{,}5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 2{,}5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 2{,}5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 2{,}5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 2{,}5$
P_1	800	700	400	450							1200	1250
P_2			1400	1550	1600	1450						
P_3						150	800	650	1200	1200		
P_4							1600	1600				
Timpul nefolosit	—	—	200	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Generalizare. Forma generală a problemelor de transport cu cereri și oferte variabile este

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = a_i + \alpha_i\,; \qquad i \in M,$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = b_j + \beta_j\,; \qquad j \in N, \qquad \text{(IV.3.3)}$$

$$x_{ij} \geqslant 0\,;$$

$$\min f = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij}\, x_{ij},$$

condițiile suplimentare fiind

$$\sum_{i \in M} (a_i + \alpha_i) = \sum_{j \in N} (b_j + \beta_j)\,;$$

$$a_i + \alpha_i \geqslant 0 \text{ pentru toți } i \in M, \qquad \text{(IV.3.4)}$$

$$b_j + \beta_j \geqslant 0 \text{ pentru toți } j \in N.$$

Scanned with OKEN Scanner

În toate problemele cu caracter practic se cunosc și intervalele de variație a parametrilor, adică se știe că

$$\underline{\alpha}_i \leqslant \alpha_i \leqslant \bar{\alpha}_i,$$
$$\underline{\beta}_j \leqslant \beta_j \leqslant \bar{\beta}_j. \qquad \text{(IV.3.5)}$$

Problema admite soluții pentru orice valori ale parametrilor dacă intervalele de variație sînt determinate astfel încît să fie verificate condițiile (IV.3.4).

În vederea rezolvării problemei parametrizate se determină o soluție optimă folosind unul din algoritmele utilizabile în cazul în care cererile și ofertele sînt constante. Factorii relativi de cost asociați soluției nu depind de parametrii α_i și β_j, dacă c_{ij} sînt constante. Valorile variabilelor din bază sînt funcții liniare de parametrii α_i și β_j, deoarece aceste valori sînt de forma

$$\pm \sum (a_i + \alpha_i) \mp \sum (b_j + \beta_j), \qquad \text{(IV.3.6)}$$

sumele referindu-se la submulțimi de indici din M și N.

Domeniul de optimalitate a soluției găsite se determină rezolvînd sistemul de inecuații

$$x_{ij}(\alpha_i, \beta_j) \geqslant 0; \qquad (i, j) \in B, \qquad \text{(IV.3.7)}$$

care rezultă din condițiile de nenegativitate a variabilelor bazei, respectînd totodată condițiile (IV.3.5).

Din punct de vedere geometric, ecuațiile $x_{ij}(\alpha_i, \beta_j) = 0$ reprezintă hiperplane în spațiul $(m + n)$ — dimensional, iar domeniul de optimalitate a soluției este intersecția polihedronului determinat de sistemul (IV.3.5) cu cel determinat de sistemul (IV.3.7).

În situația în care una dintre inecuațiile (IV.3.7) nu este satisfăcută, soluția rămîne optimă, deoarece factorii relativi de cost nu se modifică, dar nu mai este realizabilă. Pentru reoptimizarea soluției se procedează ca în exemplul I, § 2 sau:

— se construiesc toate ciclurile în care variabila care se exclude din bază și o variabilă care nu aparține bazei ocupă locuri de aceeași paritate;

— se alege ciclul în care variabila care nu face parte din bază corespunde celui mai mic factor relativ de cost.

Algoritmul de rezolvare a acestui tip de probleme este aplicabil și pentru cazurile în care cererile și disponibilitățile sînt funcții neliniare de unul sau mai mulți parametri, însă, în aceste cazuri, condițiile (IV.3.7) care determină domeniul de optimalitate a unei soluții sînt funcții neliniare de aceiași parametri.

Scanned with OKEN Scanner

§ 4. TRANSPORTURI CU CENTRE INTERMEDIARE

În practica vieţii economice, producătorul unui bun de consum nu face în acelaşi timp şi oficiul de distribuire. În cele mai multe cazuri mărfurile se depozitează în centre de desfacere cu ridicata, care aprovizionează apoi magazinele de desfacere cu amănuntul adică drumul parcurs de o marfă se compune din rutele producător-depozit şi depozit-consumator. În cele ce urmează depozitele sînt denumite „centre intermediare".

Pentru formularea problemei de transport cu centre intermediare notăm :

a_i, $i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}$ — disponibilul în centrul de producţie ;
$\bar{d}_k$, $k \in P = \{1, 2, \ldots, p\}$ — capacitatea depozitului ;
b_j, $j \in N = \{1, 2, \ldots n\}$ — cererea consumatorului ;
x_{ik} $i \in M, k \in P$ — cantitatea de marfă expediată din centrul de producţie i la depozitul k ;
y_{kj}, $k \in P$, $j \in N$, — cantitatea de marfă expediată din depozitul k consumatorului j.

Problema cere aprovizionarea consumatorilor cu cantităţile de marfă necesare, astfel încît cheltuielile totale impuse de transporturile producător-depozit, depozit-consumator să fie minime. Condiţiile pe care trebuie să le satisfacă un plan de transporturi astfel organizate sînt :

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in P} x_{ik} = a_i ; \qquad i \in M, \\ &\sum_{i \in M} x_{ik} = d_k ; \qquad k \in P, \\ &\sum_{j \in N} y_{kj} = d_k ; \qquad k \in P, \\ &\sum_{j \in N} y_{kj} = b_j ; \qquad j \in N ; \\ &x_{ik} \geqslant 0, \quad y_{kj} \geqslant 0, \end{aligned} \tag{IV.4.1}$$

iar obiectivul este minimizarea funcţiei

$$z = \sum_{i \in M} \sum_{k \in N} c_{ik} x_{ik} + \sum_{k \in P} \sum_{j \in N} f_{kj} y_{kj}, \tag{IV.4.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde x_{ik} și y_{kj} sînt costurile transportului unei unități de marfă, respectiv de la fabrică la depozit și de la depozit la consumator. Existența soluției este asigurată dacă sînt îndeplinite condițiile suplimentare

$$a_i \geqslant 0; \quad d_k \geqslant 0; \quad b_j \geqslant 0; \sum_{i \in M} a_i = \sum_{k \in P} d_k = \sum_{j \in N} b_j. \quad \text{(IV.4.3)}$$

Variabilele x_{ik} și y_{kj} sînt reciproc independente încît problema formulată se descompune în două probleme succesive, și anume: minimizarea funcției $z_1 = \sum_i \sum_k c_{ik} x_{ik}$ cu respectarea primelor două restricții din sistemul (IV.4.1) și minimizarea funcției $Z_2 = \sum_k \sum_j f_{kj} y_{kj}$ cu respectarea ultimelor două restricții din sistemul (IV.4.2), iar

$$\min z = \min z_1 + \min z_2.$$

Să presupunem însă că centrele intermediare sînt determinate numai ca poziție, capacitatea fiecăruia putînd fi stabilită între anumite limite, astfel încît costul total al transporturilor făcute pentru aprovizionarea centrelor de consum să fie minim.

Această ipoteză se exprimă prin relația

$$\underline{D}_k \leqslant d_k \leqslant \overline{D}_k. \quad \text{(IV.4.4)}$$

Condițiile (IV.4.3) de existență a soluției impun ca suma limitelor inferioare ale capacității tuturor centrelor intermediare să asigure tranzitul mărfurilor prin aceste puncte, adică

$$\sum_k \underline{D}_k \geqslant \sum_i a_i.$$

Vom rezolva o problemă de acest tip cu ajutorul unui exemplu numeric.

Exemplul I. Producția a 5 fabrici de ciment asigură aprovizionarea a 4 șantiere, prin intermediul a 3 depozite D_1, D_2 și D_3, care pot asigura tranzitul următoarelor cantități:

$$D_1 : d_1 = 300 - \lambda_1 \quad \text{cu} \quad 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 200,$$

$$D_2 : d_2 = 200 + \lambda_2 \quad \text{cu} \quad 100 \leqslant \lambda_2 \leqslant 200,$$

$$D_3 : d_3 = 100 + \lambda_3 \quad \text{cu} \quad \lambda_3 = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Producția celor 5 fabrici de ciment, distanțele pînă la depozite, necesarul fiecăruia din cele 4 șantiere și distanțele de la depozite la șantiere sînt date în tabelele următoare:

Producția fabricilor și distanțele fabrică-depozit

(120)

				a_i
	6	2	5	100
	4	4	3	250
	5	5	4	80
	7	8	5	120
	6	2	4	50
d_k	$300-\lambda_1$	$200+\lambda_2$	$100+\lambda_1-\lambda_2$	

Necesarul șantierelor și distanțele depozit-șantier

(121)

				b_j
	4	8	6	250
	5	3	8	100
	6	5	4	120
	4	3	7	130
d_k	$300-\lambda_1$	$200+\lambda_2$	$100+\lambda_1-\lambda_2$	

Obiectivul urmărit este determinarea capacității depozitelor, astfel încît aprovizionarea șantierelor să se facă cu minimum de cheltuieli de transport. Funcția de cost z dată de formula (IV.4.2) este, în acest caz, o funcție de λ_1 și λ_2, prin intermediul valorilor variabilelor x_{ik} și y_{kj}. Rezolvînd problema de transport fabrică-depozit găsim:

Soluția I optimă pentru problema fabrică-depozit

(122)

					d_k	v_k
	6	$200-\lambda_2$ 4	80 5	$20-\lambda_1+\lambda_2$ 7	6	$300-\lambda_1$ 0
	100 2	$50+\lambda_2$ 4	5	8	50 2	$200+\lambda_2$ 0
	5	3	4	$100+\lambda_1-\lambda_2$ 5	4	$100+\lambda_1-\lambda_2$ −2
a_i	100	250	80	120	50	
u_i	2	4	5	7	2	

Scanned with OKEN Scanner

Această soluție este realizabilă dacă toate variabilele din bază au valori nenegative. Deoarece parametri λ_1 și λ_2, în condițiile prevăzute, iau numai valori pozitive, soluția este realizabilă dacă

$$\begin{aligned} 200 - \lambda_2 &\geqslant 0, \\ 20 - \lambda_1 + \lambda_2 &\geqslant 0, \\ 100 + \lambda_1 - \lambda_2 &\geqslant 0. \end{aligned} \qquad \text{(IV.4.5)}$$

Prima inegalitate din (IV.4.5) este satisfăcută de toate valorile parametrului, deoarece $\lambda_2 \in [100, 200]$; ultimele două inegalități și restricțiile $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 200$, $100 \leqslant \lambda_2 \leqslant 200$ determină în planul $\lambda_1\lambda_2$ domeniul $ABCDE$ în care soluția I este optimă (fig. 14).

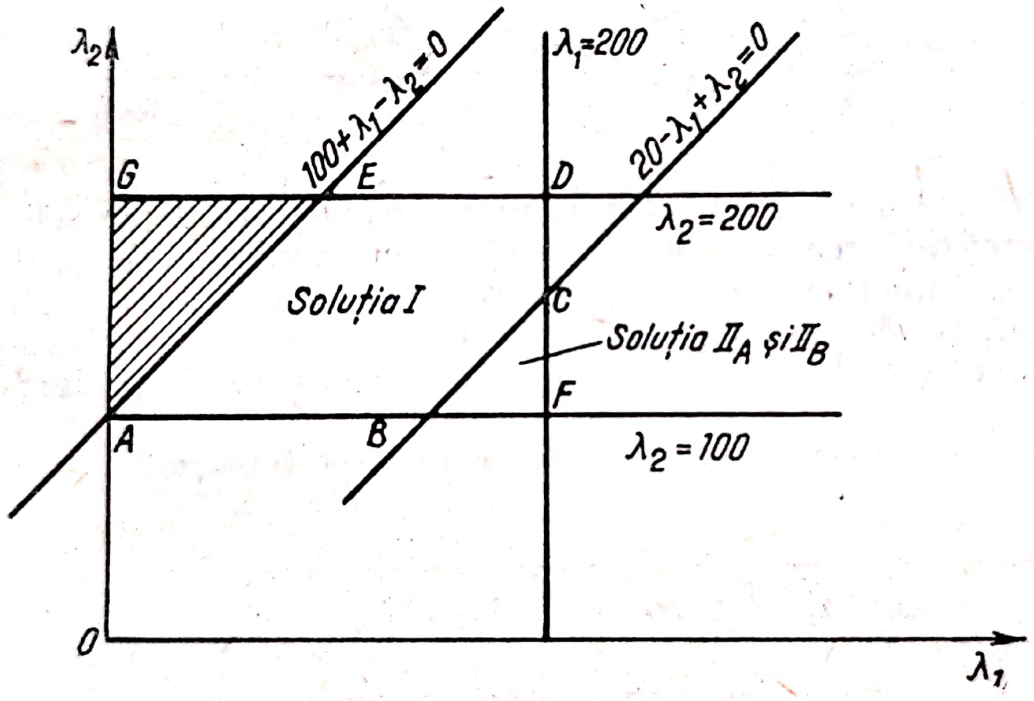


Fig. 14

Restricția $100 + \lambda_1 - \lambda_2 \geqslant 0$ reprezintă în același timp condiția ca depozitul D_3 să aibă capacitatea nenegativă, deci problema nu admite soluții în domeniul AEG. Dacă $20 - \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 0$ valoarea variabilei $x_{1,4}$ devine negativă și soluția se reoptimizează prin înlocuirea variabilei $x_{1,4}$ prin $x_{3,3}$ sau $x_{3,2}$ (există două soluții optime).

Scanned with OKEN Scanner

Soluția II_A pentru problema fabrică — depozit

(123)

						d_k / v_k
	6	$220-\lambda_1$ 4	80 5	7	6	$300-\lambda_1$ 4
	100 2	$50+\lambda_2$ 4	5	8	50 2	$200+\lambda_2$ 4
	5	$\lambda_1-\lambda_2-20$ 3	4	120 5	4	$100+\lambda_1-\lambda_2$ 3
a_i	100	250	80	120	50	
u_i	−2	0	1	2	−2	

Soluția II_B pentru problema fabrică — depozit

(124)

						d_k / v_k
	6	$200-\lambda_2$ 4	$100-\lambda_1+\lambda_2$ 5	7	6	$300-\lambda_1$ 4
	100 2	$50+\lambda_2$ 4	5	8	50 2	$200+\lambda_2$ 4
	5	3	$\lambda_1-\lambda_2-20$ 4	120 5	4	$100+\lambda_1-\lambda_2$ 3
a_i	100	250	80	120	50	
u_i	−2	0	1	2	−2	

Ambele soluții II_A și II_B sînt optime pe tot domeniul BCF, așadar s-au găsit soluțiile problemei fabrică-depozit pe tot domeniul de variație a parametrilor.

Scanned with OKEN Scanner

O soluție optimă pentru problema de transport depozit-șantier este următoarea :

(125)

					d_k / v'_k
	250 4	5	$20-\lambda_1+\lambda_2$ 6	$30-\lambda_2$ 4	$300-\lambda_1$ 0
	8	100 3	5	$100+\lambda_2$ 3	$200+\lambda_2$ -1
	6	8	$100+\lambda_1-\lambda_2$ 4	7	$100+\lambda_1-\lambda_2$ -2
b_j	250	100	120	130	
u_j	4	4	6	4	

Această soluție nu este realizabilă, deoarece condiția $30 - \lambda_2 \geqslant 0$ nu poate fi satisfăcută în intervalul de variație prevăzut pentru parametrul λ_2.

Formînd ciclul corespunzător factorului relativ de cost minim pe mulțimea variabilelor care nu aparțin bazei, se găsește soluția următoare :

Soluția 1 optimă pentru problema depozit-șantier

(126)

					d_k / v'_k
	250 4	5	$50-\lambda_1$ 6	4	$300-\lambda_1$ 6
	8	100 3	λ_2-30 5	130 3	$200+\lambda_2$ 5
	6	8	$100+\lambda_1-\lambda_2$ 4	7	$100+\lambda_1-\lambda_2$ 4
b_j	250	100	120	130	
u_j	-2	-2	0	-2	

Scanned with OKEN Scanner

care este realizabilă pentru $50 - \lambda_1 \geqslant 0$. Din intersecţia mulţimii soluţiilor optime pentru problema fabrică-depozit cu mulţimea soluţiilor optime pentru problema depozit-şantier (fig. 15) se găseşte că funcţia obiectiv ia valoarea minimă într-un punct extrem al poligonului AMN. Valoarea funcţiei cost a problemei fabrică-depozit, pe mulţimea AMN, pentru care programul optim este I, are expresia

$$z_1(I) = 2340 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2.$$

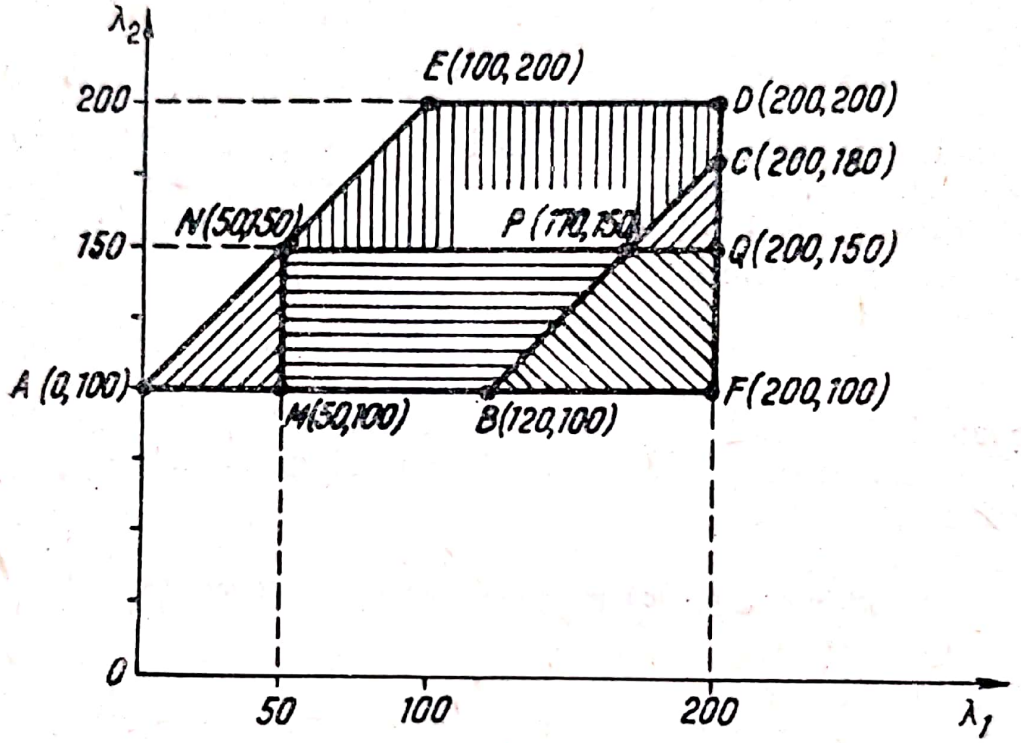


Fig. 15

Valoarea funcţiei obiectiv pentru soluţia 1 a problemei depozit-şantier este

$$z_2(1) = 2240 - 2\lambda_1 + \lambda_2,$$

deci obiectivul problemei propuse este minimizarea funcţiei

$$z = z_1(I) + z_2(1) = 4580 - 4\lambda_1 + 3\lambda_2$$

pe mulţimea AMN. Este uşor de văzut că

$$\min_{(AMN)} z = z(M) = 4680.$$

Scanned with OKEN Scanner

Această soluție s-a găsit rezolvînd geometric problema de programare liniară: să se minimizeze

$$z = 4580 - 4\lambda_1 + 3\lambda_2$$

cu respectarea condițiilor

$$\begin{aligned} 100 + \lambda_1 - \lambda_2 &\geqslant 0, \\ 50 - \lambda_1 &\geqslant 0, \\ \lambda_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

În general, în acest stadiu soluția problemei se obține rezolvînd o problemă de programare liniară ale cărei restricții sînt condițiile de nenegativitate a variabilelor bazice în soluțiile I și 1, obiectivul fiind minimizarea funcției

$$z = z_1(I) + z_2(1).$$

În cazul în care $\lambda_1 > 50$ soluția 1 nu mai este realizabilă, deoarece $y_{13} < 0$. Reoptimizarea se obține înlocuind în bază pe y_{13} prin y_{31}. Astfel găsim:

Soluția 2 optimă pentru problema depozit-șantier

(127)

					d_k / v_k
	$300-\lambda_1$ 4	5	6	4	$300-\lambda_1$ -3
	8	100 3	λ_2-30 5	130 3	$200+\lambda_2$ 0
	λ_1-50 6	8	$150-\lambda_2$ 4	7	$100+\lambda_1-\lambda_2$ -1
b_j	250	100	120	130	
u_j	7	3	5	3	

Condițiile de nenegativitate a variabilelor de bază arată că și această soluție devine nerealizabilă pentru $\lambda_2 > 150$. Variabila y_{33} este atunci înlocuită în bază prin y_{21} și se ajunge la:

Scanned with OKEN Scanner

Soluția 3 optimă pentru problema depozit-șantier

(128)

$300-\lambda_1$ 4	5	6	4	$300-\lambda_1$ 4
λ_2-150 8	100 3	120 5	130 3	$200+\lambda_2$ 8
$\lambda_1-\lambda_2+100$ 6	8	4	7	$100+\lambda_1-\lambda_2$ 6
250 0	100 −5	120 −3	130 −5	

Pe fig. 15 s-a reprezentat și dreapta $\lambda_2 = 150$ și în acest fel s-au găsit domeniile:

a) AMN pentru soluțiile I $(F\to D)$ și 1$(D\to S)$;
b) $BMNP$ pentru soluțiile I $(F\to D)$ și 2$(D\to S)$;
c) $NPCDE$ pentru soluțiile I $(F\to D)$ și 3$(D\to S)$;
d) $BPQF$ pentru soluțiile II $(F\to D)$ și 2$(D\to S)$;
e) PQC pentru soluțiile II $(F\to D)$ și 3$(D\to S)$,

unde prin $F\to D$ s-a notat problema fabrică-depozit și prin $D\to S$ problema depozit-șantier. Din tabelele soluțiilor optime se calculează valorile funcțiilor obiectiv z_1 pentru $F\to D$ și z_2 pentru $D\to S$. Avem

$$z_1(\mathrm{I}) = 2340 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2, \quad z_2(1) = 2240 - 2\lambda_1 + \lambda_2,$$
$$z_1(\mathrm{II}) = 2320 - \lambda_1 + \lambda_2, \quad z_2(2) = 2040 + 2\lambda_1 + \lambda_2,$$
$$z_2(3) = 1890 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2.$$

Însumînd corespunzător aceste rezultate găsim pentru

a) AMN: $z=4580-4\lambda_1+3\lambda_2$; min $z=4680$ dacă $\lambda_1 = 50$; $\lambda_2 = 150$;
b) $BMNP$: $z=4380+3\lambda_2$; min $z=4680$ „ $\lambda_1 = 120$; $\lambda_2 = 100$ și
„ $\lambda_1 = 50$; $\lambda_2 = 150$;
c) $NPCDE$: $z=4230+4\lambda_2$; min $z=4830$ „ $\lambda_1 = 50$; $\lambda_2 = 150$ și
„ $\lambda_1 = 170$; $\lambda_2 = 150$;
d) $BPQF$: $z=4360+\lambda_1+2\lambda_2$; min $z=4680$ „ $\lambda_1 = 120$; $\lambda_2 = 100$;
e) PCQ: $z=4210+\lambda_1+3\lambda_2$; min $z=4710$ „ $\lambda_1 = 200$; $\lambda_2 = 100$.

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea minimă a costului transporturilor necesare aprovizionării şantierelor este de 4 680 unităţi băneşti. Acest minim poate fi atins fie pentru $\lambda_1 = 50$; $\lambda_2 = 150$, fie pentru $\lambda_1 = 120$; $\lambda_2 = 100$, ceea ce înseamnă că depozitele pot fi dimensionate astfel:

$$D_1 = 250\,; \quad D_2 = 300\,; \quad D_3 = 30$$

sau

$$D_1 = 180\,; \quad D_2 = 300\,; \quad D_3 = 120.$$

Alegerea unei soluţii sau a celeilalte poate fi determinată de motive care nu au fost incluse în condiţiile problemei, de exemplu de investiţiile necesare construirii depozitelor.

În concluzie, rezolvarea problemelor de transport cu centre intermediare a căror capacitate poate fi stabilită între anumite limite, conduce la rezolvarea a două probleme de transport şi la un număr de probleme de programare liniară în care parametrii devin variabile de structură.

§ 5. TRANSPORTURI CU CAPACITĂŢI LIMITATE

Adeseori, în practică, transporturile care trebuie făcute pentru aprovizionarea centrelor de consum sînt condiţionate de limitarea capacităţii de transport pe unele rute, limitări care apar din diferite cauze. De exemplu, în transporturile feroviare limitările pot apărea din cauza disponibilului de vagoane pe anumite rute.

Menţinînd notaţiile folosite în problemele de transport şi notînd cu α_{ij} capacitatea maximă de trafic pe ruta (ij), problemele de transport cu capacităţi limitate au următorul model:

Să se minimizeze funcţia

$$z = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij}\, x_{ij}, \tag{IV.5.1}$$

respectînd condiţiile

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = a_i\,; \qquad i \in M,$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = b_j\,; \qquad j \in N, \tag{IV.5.2}$$

$$x_{ij} \leqslant \alpha_{ij}\,; \quad (i, j) \in MN.$$

$$x_{ij} \geqslant 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema admite o soluție dacă sînt satisfăcute condițiile

$$a_i \geqslant 0;\ b_i \geqslant 0;\ \alpha_{ij} \geqslant 0;\ \sum_{i \in M} a_i = \sum_{j \in N} b_j;\ \sum_{i \in M} \alpha_{ij} \geqslant b_j,\ j \in N \text{ și}$$

$$\sum_{j \in N} \alpha_{ij} \geqslant a_i, \qquad i \in M.$$

Se demonstrează [21] că o soluție $X^\circ = \{x_{ij}^\circ\}$ a acestei probleme este optimă dacă variabilele duale u_i și v_j satisfac condițiile

$$\begin{aligned} &u_i + v_j = c_{ij} \text{ pentru } x_{ij} \in X^\circ \text{ și } x_{ij} < d_{ij}, \\ &u_i + v_j \geqslant c_{ij} \text{ pentru } x_{ij} \in X^\circ \text{ și } x_{ij} = d_{ij}, \\ &u_i + v_j \leqslant c_{ij} \text{ pentru } x_{ij} \notin X^\circ, \text{ adică } x_{ij} = 0. \end{aligned} \qquad \text{(IV.5.3)}$$

Determinarea unei soluții realizabile de bază. Datele problemelor de transport cu capacități limitate pot fi prezentate în tabele similare cu cele folosite la problemele de transport fără restricții de capacitate, introducînd în colțul din dreapta, sus, al fiecărui pătrat mărimile α_{ij}. Soluția de bază se poate construi utilizînd metoda unghiului nord-vest, metoda elementului c_{ij} minim, metoda diferenței maxime pe linii și coloane sau oricare alta. Spre deosebire de problemele în care capacitățile rutelor sînt nelimitate în problemele de care ne ocupăm, unei variabile x_{ij} i se atribuie valoarea egală cu min $(a_{ij}, b_{ij}, \alpha_{ij})$. Dacă acest minim este a_{ij} sau b_{ij}, variabila intră în bază; dacă α_{ij} este minim, x_{ij} nu este considerată variabilă de bază decît în cazurile în care valoarea atribuită asigură în același timp satisfacerea cererii într-un punct de consum sau folosirea completă a disponibilului într-un centru de producție sau depozitare. De cele mai multe ori soluția găsită este nerealizabilă și transformarea ei într-o soluție realizabilă de bază necesită aplicarea unei transformări echivalente cu cele folosite în metoda simplex în două faze. Pentru mai multă claritate vom rezolva următoarea problemă:

Exemplul I. Datele problemei de transport cu capacități limitate pe unele rute sînt prezentate în tabelul (129). Numerele înscrise în colțul din dreapta, sus, în pătratul (ij), arată capacitatea maximă de transport pe ruta (ij). Pătratele care nu conțin aceste numere corespund rutelor cu capacități nelimitate.

Scanned with OKEN Scanner

					a_i
	10 8	7	5	30 4	60
	7	18 6	6	6	20
	10 9	15 5	7	20 5	60
b_j	20	30	40	50	

În exemplul propus construim soluţia iniţială prin metoda elementului minim din tabel, $\min c_{ij} = c_{14} = 4$, deci variabilei x_{44} i se atribuie valoarea egală cu $\min(a_1, b_4, \alpha_{14}) = \min(60, 50, 30) = 30$. Această valoare reprezintă limita superioară a capacităţii de transport pe ruta (1, 4), deci x_{14} nu este variabilă din bază. După atribuirea valorii $x_{14} = 30$ avem $a_1' = 30$ şi $b_4' = 20$. Se obişnuieşte ca variabilele care nu aparţin bazei să fie înscrise în tabel cu valori supraliniate, pentru a face distincţia între aceste variabile şi cele din bază. Continuînd construirea soluţiei avem $\min c_{ij} = c_{13} = c_{32} = c_{34} = 5$ şi se poate lua $x_{13} = 30$. Prin acelaşi procedeu se completează soluţia, dar în depozitul a_3 rămîne o cantitate nefolosită de 10 unităţi, în timp ce în b_1 cererea este nesatisfăcută tot pentru 10 unităţi. Aceste valori se înscriu într-o linie şi o coloană suplimentară, se notează cu $x_{0,1}$ şi $x_{3,0}$ şi constituie variabile artificiale care trebuie eliminate din soluţie. În acest scop se foloseşte următoarea metodă:

Se înlocuieşte problema iniţială, al cărei model este

$$\sum_j x_{1j} = 60; \quad \sum_j x_{2j} = 20; \quad \sum_j x_{3j} = 60;$$

$$\sum_i x_{i1} = 20; \quad \sum_i x_{i2} = 30; \quad \sum_i x_{i3} = 40; \quad \text{(IV.5.4)}$$

$$\sum_i x_{i4} = 50; \quad x_{ij} \geqslant 0;$$

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}, \quad \text{(IV.5.5)}$$

					a_i
	10 8	7	5	30 4	60
	7	18 6	6	6	20
	10 9	15 5	7	20 5	60
b_j	20	30	40	50	

În exemplul propus construim soluţia iniţială prin metoda elementului minim din tabel, min $c_{ij} = c_{14} = 4$, deci variabilei x_{44} i se atribuie valoarea egală cu min (a_1, b_4, α_{14}) = min (60, 50, 30) = 30. Această valoare reprezintă limita superioară a capacităţii de transport pe ruta (1, 4), deci x_{14} nu este variabilă din bază. După atribuirea valorii x_{14}= 30 avem $a_1' = 30$ şi $b_4' = 20$. Se obişnuieşte ca variabilele care nu aparţin bazei să fie înscrise în tabel cu valori supraliniate, pentru a face distincţia între aceste variabile şi cele din bază. Continuînd construirea soluţiei avem min $c_{ij} = c_{13} = c_{32} = c_{34} = 5$ şi se poate lua $x_{13} = 30$. Prin acelaşi procedeu se completează soluţia, dar în depozitul a_3 rămîne o cantitate nefolosită de 10 unităţi, în timp ce în b_1 cererea este nesatisfăcută tot pentru 10 unităţi. Aceste valori se înscriu într-o linie şi o coloană suplimentară, se notează cu $x_{0,1}$ şi $x_{3,0}$ şi constituie variabile artificiale care trebuie eliminate din soluţie. În acest scop se foloseşte următoarea metodă:

Se înlocuieşte problema iniţială, al cărei model este

$$\sum_j x_{1j} = 60; \quad \sum_j x_{2j} = 20; \quad \sum_j x_{3j} = 60;$$

$$\sum_i x_{i1} = 20; \quad \sum_i x_{i2} = 30; \quad \sum_i x_{i3} = 40; \quad \text{(IV.5.4)}$$

$$\sum_i x_{i4} = 50; \quad x_{ij} \geqslant 0;$$

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij}\, x_{ij}, \quad \text{(IV.5.5)}$$

Scanned with OKEN Scanner

prin problema al cărei model este

$$\sum_j x_{1j} = 60\,; \quad \sum_j x_{2j} = 20\,; \quad \sum_j x_{3j} + x_{3,0} = 60\,;$$

$$\sum_i x_{i1} + x_{0,1} = 20\,; \quad \sum_i x_{i2} = 30\,; \quad \sum_i x_{i3} = 40\,; \tag{IV.5.6}$$

$$\sum_i x_{i4} = 50\,; \qquad x_{ij} \geqslant 0\,;$$

$$\min\,(x_{3,0} + x_{0,1}). \tag{IV.5.7}$$

Dualul modelului (IV.5.6) — (IV.5.7) este

$$\begin{aligned} &u_i + v_j \leqslant 0 \text{ pentru toți } i \neq 3 \text{ și } j \neq 1, \\ &u_3 \leqslant 1, \\ &v_1 \leqslant 1, \\ &\max\,(\sum_i a_i u_i + \sum_j b_j v_j), \end{aligned} \tag{IV.5.8}$$

din care rezultă următoarele criterii de optimalitate a soluției:

$$\begin{aligned} &u_i + v_j = 0, \text{ pentru } x_{ij} \in B \text{ și } i \neq 3,\ j \neq 1, \\ &u_3 = 1, \\ &v_1 = 1, \end{aligned} \tag{IV.5.9}$$

$$u_i + v_j \leqslant 0 \text{ pentru } x_{ij} \notin B. \tag{IV.5.10}$$

Dacă la încheierea aplicării algoritmului minimul funcției (IV.5.7) este egal cu zero, aceasta înseamnă că s-a determinat o soluție realizabilă de bază. În caz contrar, problema nu admite soluții. Pe tabelul problemei algoritmul se aplică înlocuind costurile c_{ij} prin $d_{ij} = 0$, cu excepția costurilor asociate variabilelor artificiale x_{30} și x_{01}, care sînt $d_{30} = d_{01} = 1$.

Luînd variabilele duale $u_3 = 1$ și $v_1 = 1$ se calculează ceilalți multiplicatori din condițiile (IV.5.9) și apoi se testează optimalitatea soluției, verificînd dacă sînt satisfăcute inegalitățile (IV.5.10). În tabelul următor s-a trecut soluția inițială nerealizabilă și s-au înlocuit costurile c_{ij} prin d_{ij}. De asemenea sînt calculate variabilele duale pentru modelul (IV.5.6) — (IV.5.7) și în colțul din dreapta, jos, în fiecare pătrat, sînt trecute sumele $u_i + v_j$.

Scanned with OKEN Scanner

(130)

					a_i / u_i
	$10-\theta-\varphi$ 1				
	10 θ ② 0	⓪ 0	$30-\theta$ ⓪ 0	30 $\overline{30}$ ⓪ 0	60 1
	φ ② 0	18 15 ⓪ 0	$5-\varphi$ ⓪ 0	⓪ 0	20 1
$10-\theta-\varphi$ 1	10 $\overline{10}$ ② 0	15 $\overline{15}$	$5+\theta+\varphi$ ⓪ 0	20 20 ⓪ 0	60 1
b_j	20	30	40	50	
v_j	1	-1	-1	-1	

Se constată că soluția nu este optimă, fiindcă $u_1 + v_1$, u_2+v_1 și $u_3 + v_1$ sînt pozitivi. Valoarea variabilei x_{31} nu poate fi mărită, deoarece este egală cu capacitatea maximă a rutei (3, 1), dar pot intra în bază variabilele x_{11} sau x_{21}. Dacă se introduc simultan în bază aceste două variabile se găsește o soluție inițială de bază, mai aproape de soluția optimă a problemei propuse. Valorile parametrilor care modifică variabilele sînt $\theta = 5$ și $\varphi = 5$. În tabelul următor este trecută

(131)

					a_i / b_i
	10 5 8	7	$25+\theta$ 5	30 $\overline{30}-\theta$ 4	60 -2
	5 7	18 15 6	6	6	20 -3
	10 $\overline{10}$ 9	15 $\overline{15}$ 5	$15-\theta$ 7	20 $20+\theta$ 5	60 0
b_j	20	30	40	50	
v_j	15	9	7	5	

Scanned with OKEN Scanner

soluţia realizabilă de bază, iar costurile d_{ij} sînt înlocuite prin costurile iniţiale c_{ij}, astfel încît s-a realizat revenirea la modelul (IV.5.4)—(IV.5.5) şi se poate trece la optimizarea soluţiei.

Baza conţine şase variabile, deci, ca şi în problema de transport cu capacităţi nelimitate, se poate atribui o valoare arbitrară uneia dintre variabilele duale. Luînd în acest exemplu $u_3 = 1$ se calculează valorile pentru ceilalţi u_i şi v_j din condiţiile $u_i + v_j = c_{ij}$ pentru $x_{ij} \in B$. Calculul costurilor comparative $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ arată că soluţia nu este optimă, deoarece $\bar{c}_{1,4} > 1$ şi $x_{1,4}$ este la limita superioară. Este convenabil să fie micşorată valoarea variabilei $x_{1,4}$, lăsînd neschimbate variabilele care nu aparţin bazei şi modificînd numai variabilele din bază.

În acest scop se formează ciclul din tabelul anterior, din care rezultă că $\theta = 0$, deoarece $x_{3,4}$ este la limita superioară a capacităţii:

(132)

					a_i	u_i
	10 5 8		25 5	30 30 4	60	0
	5 7	18 15 6	6	6	20	−1
	10 $\overline{10}$ 9	15 $\overline{15}$ 5	15 7	20 $\overline{20}$ 5	60	2
b_j	20	30	40	50		
v_j	8	7	5	4		

deci modificarea soluţiei constă în fond numai în transformarea variabilei $x_{1,4}$ în variabilă din bază şi a lui $x_{3,4}$ în variabilă la limita superioară. Recalculînd u_i, v_j pentru noua soluţie şi preţurile comparative, se constată că soluţia este optimă.

Problemele de transport cu capacităţi limitate pot avea costurile, disponibilul, cererile sau capacităţile variabile în funcţie de un parametru. Singurul aspect nou fiind parametrizarea capacităţilor disponibile, ne vom ocupa numai de acest caz.

Scanned with OKEN Scanner

Să admitem că în exemplul rezolvat mai înainte, transporturile din depozitul al treilea cu disponibilul $a_3 = 60$ în centrele de consum cu cererile $b_1 = 20$; $b_2 = 30$; $b_4 = 50$ se efectuează folosind un parc de 45 autocamioane repartizate astfel: pe ruta (3, 1) 10 autocamioane, pe ruta (3, 2) 15 camioane, iar pe ruta (3, 4) 20 de camioane. În aceste condiții, problema este rezolvată.

Se pune întrebarea dacă o altă repartizare a acestor mijloace de transport pe rutele considerate nu ar putea aduce o scădere a costului total de transport al mărfurilor. Folosind ca orientare în modificarea alocării mijloacelor de transport, costurile transportului pe rutele studiate, considerăm următoarele limitări ale capacităților: $\alpha_{3,1} = 10 - \lambda - \mu$; $\alpha_{3,2} = 15 + \lambda$; $\alpha_{3,4} = 20 + \mu$. Dacă $\lambda \neq 0$ sau $\mu \neq 0$, valoarea variabilei $x_{3,1}$ depășește capacitatea de transport, deci soluția devine nerealizabilă, iar $x_{3,2}$ și $x_{3,4}$ nu mai iau valori la limita superioară. Prețurile comparative $\bar{c}_{3,2} = -4$, $\bar{c}_{3,4} = -1$ arată că se poate obține scăderea maximă a costului cînd $x_{3,2}$ intră în bază. Valoarea cea mai mare a acestei variabile se poate obține pentru $\lambda = 10$. În aceste condiții, ruta (3, 1) are capacitatea de transport nulă, deci este o rută interzisă, și soluția din tabelul următor este optimă.

(133)

					a_i / u_i
	10 5 8	 7	25 5	30 30 4	60 0
	15 7	18 5 6	 6	 6	20 −1
	  9	25 25 5	15 7	20 20 5	60 2
b_j	20	30	40	50	
v_j	8	7	5	4	

Se pune întrebarea: se poate stabili o regulă generală de determinare a valorilor critice ale parametrilor în cazul acesta?

Scanned with OKEN Scanner

§ 6. PROBLEMA DISTRIBUIRII SARCINILOR

Problema distribuirii optime a sarcinilor apare în multe sectoare economice. De exemplu, organizarea producţiei industriale implică rezolvarea acestui tip de probleme, începînd de la repartizarea sarcinilor unei ramuri industriale între unităţile subordonate pînă la repartizarea sarcinilor unei secţii dintr-o fabrică pe utilajele disponibile. De asemenea, repartizarea planului cooperativelor agricole de producţie între unităţile subordonate constituie o problemă de acelaşi tip.

Din punct de vedere matematic, atît formularea, cît şi metodele de rezolvare a problemelor de distribuire a sarcinilor sînt legate de problemele de transport, constituind, într-un oarecare sens, o generalizare a acestora. În 1956, A. Orden [64] a dat o metodă prin care problema distribuirii sarcinilor se reduce la o problemă de transport cu capacităţi determinate. În 1958, H. Wagner [75] găseşte posibilitatea de a reduce o problemă de transport cu capacităţi date la o problemă de transport simplă, iar W. Jewell generalizează algoritmul Ford-Fulkerson pentru rezolvarea problemelor de transport cu şi fără capacităţi date, astfel încît să fie folosit în rezolvarea problemelor de distribuire a sarcinilor.

În cele ce urmează noi vom folosi, pentru probleme generale, o metodă datorată lui Dantzig [21] şi foarte puţin diferită de cea folosită în rezolvarea problemelor de transport, iar pentru o subclasă a acestor probleme, metoda lui H. Markowitz [54], care constituie o aplicaţie a programării parametrice.

Pentru a stabili modelul matematic al problemelor de distribuire a sarcinilor luăm în discuţie următoarea temă:

O unitate agricolă care şi-a însuşit un plan de producţie trebuie să asigure îndeplinirea sarcinilor de plan, folosind terenurile disponibile, terenuri care au fost clasificate după notele de bonitare a solurilor. Planul de producţie prevede cultivarea a n plante $P_1, P_2, \ldots, P_n$ şi cantităţile $b_j, j = \{1, 2, \ldots, n\} = N$, care trebuie obţinute din fiecare. Terenurile de care dispune unitatea agricolă sînt împărţite în m categorii. Se cunosc atît suprafeţele $a_i, i = \{1, 2, \ldots, m\} = M$ ale fiecărei categorii de teren, cît şi producţia medie p_{ij} a unui hectar din categoria de teren i cultivat cu planta j. Repartizarea culturilor pe diferitele terenuri trebuie făcută astfel încît să se asigure obţinerea cantităţilor planificate cu:

a) minimum de cheltuieli băneşti şi de forţă de muncă, sau

b) folosind o suprafaţă minimă.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă x_{ij} reprezintă suprafaţa de teren din categoria i cultivată cu planta j, problema se formulează astfel:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leqslant a_i, \qquad i \in M, \tag{VI.6.1}$$

$$\sum_{i \in M} p_{ij}\, x_{ij} = b_j, \qquad j \in N, \tag{IV.6.2}$$

$$x_{ij} \geqslant 0; \qquad i, j \in M \cdot N.$$

Relaţiile (IV.6.1) arată că totalul suprafeţelor din categoria i cultivate cu diferite plante nu depăşeşte suprafaţa totală a_i a acestei categorii; relaţiile (IV.6.2) exprimă condiţia ca producţia obţinută pe diferitele categorii de teren, pentru fiecare produs din plan, să asigure cantitatea planificată.

Dacă obiectivul planificării este îndeplinirea planului cu minimul de cheltuieli, atunci soluţiile nenegative ale sistemului (IV.6.1) — (IV.6.2) trebuie să minimizeze funcţia

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij}\, x_{ij} = z. \tag{IV.6.3}$$

Dacă se urmăreşte crearea unui disponibil maxim de teren, care să fie folosit pentru alte culturi, atunci notînd cu x_i suprafaţa excedentară din categoria de teren i, obiectivul este maximizarea funcţiei

$$\sum_i x_i = w. \tag{IV.6.4}$$

Desigur că pot fi date şi alte interpretări modelului (IV.6.1)—(IV.6.2), căruia i se ataşează una dintre funcţiile obiectiv (IV.6.3) sau (IV.6.4). De exemplu, dacă se notează cu:

a_i = numărul de ore efective de funcţionare a unui strung de tip i;

b_j = numărul de piese de tip j prevăzut în planul de producţie;

p_{ij} = numărul de ore necesar strungului i pentru prelucrarea unei piese de tip j;

c_{ij} = costul prelucrării unei piese de tip j pe strungul i;

x_{ij} = numărul de piese j prelucrate pe strungul i;

x_i = numărul de ore în care strungul i rămîne nefolosit după îndeplinirea planului.

Modelele de mai înainte constituie formularea matematică a problemei de repartizare a planului de producţie a unei secţii mecanice, pe diferite tipuri de utilaje folosite în scopul de a obţine producţia la un cost minim sau în minimum de timp.

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că variabilele x_i din funcția (IV.6.4) sînt în același timp variabile de abatere, care transformă inecuațiile (IV.6.1) în ecuații.

Din cele arătate anterior reiese că modelul problemei standard de distribuire a sarcinilor este

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in N} x_{ij} = a_i\,; \qquad i \in M,\\ &\sum_{i\in M} p_{ij}x_{ij} = b_j\,; \qquad j \in N,\\ &x_{ij} \geqslant 0\,; \qquad i, j \in M\cdot N,\\ &\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij} = z(\min). \end{aligned} \tag{IV.6.5}$$

Notînd cu u_i și v_j variabilele duale, duala problemei standard de distribuire a sarcinilor este

$$\begin{aligned} &u_i + p_{ij}v_j \leqslant c_{ij} \qquad i, j \in M\cdot N\,;\\ &\sum_{i\in M} a_iu_i + \sum_{j\in N} b_jv_j = w\ (\max) \end{aligned} \tag{IV.6.6}$$

și deci criteriile de optimalitate a unei soluții $X^0 = \{x_{ij}^0\}$ sînt

$$u_i + p_{ij}v_j = c_{ij} \text{ dacă } x_{ij} \in X^0 \tag{IV.6.7}$$

$$u_i + p_{ij}v_j \leqslant c_{ij} \text{ dacă } x_{ij} \notin X^0 \text{ și deci } x_{ij} = 0. \tag{IV.6.8}$$

Pentru cazul general, în care primul grup de restricții este de forma (IV.6.1), modelul problemei de distribuire a sarcinilor este

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in N} x_{ij} + x_i = a_i,\\ &\sum_{i\in M} p_{ij}x_{ij} = b_j,\\ &x_{ij} \geqslant 0 \quad x_i > 0,\\ &\sum_{i\in M}\sum_{j\in N} c_{ij}x_{ij} = z\ (\min) \end{aligned} \tag{IV.6.9}$$

și dualul său se scrie

$$\begin{aligned} &u_i + p_{ij}v_j \leqslant c_{ij},\\ &u_i \leqslant 0, \quad v_j \text{ oarecare},\\ &\sum_{i\in M} a_iu_i + \sum_{j\in N} b_jv_j = w(\max), \end{aligned} \tag{IV.6.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci criteriile de optimalitate a soluției $X^0\{x_{ij}^0, x_i^0\}$ sînt

$$\begin{aligned} u_i + p_{ij}v_j &= c_{ij}; & x_{ij} &\in X^0, \\ u_i + p_{ij}v_j &\leqslant c_{ij}; & x_{ij} &\notin X^0, \\ u_i &= 0; & x_i &\in X^0, \\ u_i &\leqslant 0; & x_i &\notin X^0. \end{aligned} \qquad \text{(IV.6.11)}$$

Aceste probleme pot fi prezentate, ca și cele de transport cu capacități date, sub forma unui tabel care conține mărimile p_{ij}, c_{ij}, a_i, b_j și în care se trec soluțiile $X^0 = \{x_{ij}^0\}$ și valorile variabilelor duale u_i și v_j. Această prezentare este foarte utilă pentru construirea unei soluții inițiale de bază, prin următorul procedeu:

a) se alege $c_{rs} = \min\limits_{(i,j)} (c_{ij})$;

b) se atribuie variabilei x_{rs} valoarea $x_{rs} = \min\left\{a_r, \frac{b_s}{p_{rs}}\right\}$;

c) se șterge din tabel linia sau coloana saturată și se continuă aplicarea algoritmului pe tabelul redus.

La sfîrșitul aplicării metodei, o linie sau o coloană rămîne nesatisfăcută. În problemele standard se introduce o variabilă artificială x_{q0} sau x_{0t} în linia sau coloana nesatisfăcută. Soluția găsită nu este realizabilă, dar printr-un procedeu analog metodei simplex în două faze, din această soluție se obține soluția realizabilă înlocuind în prima fază funcția obiectiv prin:

$$\min \xi = \sum_i \sum_j d_{ij} x_{ij}, \qquad \text{(IV.6.12)}$$

unde

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ pentru toți } i = M - q \text{ și } j \in N - t, \\ 1 \text{ pentru } i = q;\ j = 0 \text{ sau } i = 0;\ j = t. \end{cases}$$

Multiplicatorii u_i și v_j asociați soluției optime a problemei cu restricțiile (IV.6.5) și funcția obiectiv (IV.6.12) satisfac condițiile

$$\begin{aligned} u_i + p_{ij}v_j &= 0 \quad \text{pentru} \quad x_{ij} > 0 \text{ și } i \neq q, \quad j \neq t, \\ u_q &= 1 \quad \text{dacă} \quad x_{q,0} > 0, \\ v_t &= 1 \quad \text{dacă} \quad x_{0t} > 0. \end{aligned}$$

Dacă pentru soluția optimă $\min \xi = 0$, această soluție este realizabilă pentru problema inițială; dacă $\min \xi \neq 0$ problema propusă nu admite o soluție realizabilă de bază.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru modelele compatibile de forma (IV.6.9), o linie rămîne totdeauna nesatisfăcută, dar variabila x_{q0}, care trebuie adăogată, nu mai este o variabilă artificială, ci variabila de abatere x_q, şi soluţia găsită este realizabilă.

Pentru stabilirea şi aplicarea algoritmelor de rezolvare a modelelor formulate anterior vom folosi două exemple.

Exemplul I. O gospodărie agricolă dispune de trei categorii de terenuri, cu suprafeţele $a_1 = 10$; $a_2 = 8$; $a_3 = 7$. Pe aceste terenuri trebuie obţinute cantităţile de cereale $b_1 = 24$; $b_2 = 32$; $b_3 = 16$; $b_4 = 20$. Cheltuielile materiale şi de muncă pentru culturile specificate şi productivitatea fiecărei categorii de teren sînt cuprinse în tabelul următor:

(134)

	(4)	(5)	(6)	(7)	a_i
(1)	$p_{11} = 3$ $c_{11} = 2$	$p_{12} = 4$ $c_{12} = 3$	$p_{13} = 5$ $c_{13} = 4$	$p_{14} = 5$ $c_{14} = 4$	10
(2)	$p_{21} = 4$ $c_{21} = 2$	$p_{22} = 2$ $c_{22} = 2$	$p_{23} = 4$ $c_{23} = 3$	$p_{24} = 4$ $c_{24} = 3$	8
(3)	$p_{31} = 4$ $c_{31} = 3$	$p_{32} = 3$ $c_{32} = 3$	$p_{33} = 5$ $c_{33} = 3$	$p_{34} = 4$ $c_{34} = 2$	7
b_j	24	32	16	20	

Planificarea se face în scopul de a îndeplini planul cu cheltuieli minime.

Modelul problemei este de forma (IV.6.9).

Soluţia iniţială. Se caută $\min\limits_{ij} c_{ij}$. Din tabel se citeşte

$$\min_{ij} c_{ij} = 2 = c_{1,2} = c_{2,1} = c_{2,2} = c_{3,4}.$$

Se alege, de exemplu, ca variabilă care intră în bază $x_{3,4}$ şi se ia

$$x_{3,4} = \min\left(a_3, \frac{b_4}{p_{3,4}}\right) = \min\left(7, \frac{20}{4}\right) = 5.$$

După aceasta, coloana (4) este ştearsă din tabel, iar $a_3' = a_3 - 5 = 7 - 5 = 2$:

Dacă se alege acum ca variabilă de bază $x_{2,1}$, i se atribuie valoarea

$$x_{2,1} = \min\left(a_2, \frac{b_1}{p_{2,1}}\right) = \min\left(8, \frac{24}{4}\right) = 6,$$

apoi coloana (1) se șterge din tabel și $a_2' = a_2 - 6 = 8 - 6 = 2$.

Continuăm construirea soluției luînd

$$x_{2,2} = \min\left(a_2', \frac{b_2}{p_{2,2}}\right) = \min\left(2, \frac{32}{2}\right) = 2,$$

deci este satisfăcută linia (2) și $b_2' = b_2 - p_{2,2}x_{2,2} = 32 - 4 = 28$.

În tabelul rămas, $\min\limits_{ij} c_{ij} = 3 = c_{1,2} = c_{3,2}$, încît se poate lua

$$x_{1,2} = \min\left(a_1, \frac{b_2'}{p_{1,2}}\right) = \min\left(10, \frac{28}{4}\right) = 7$$

și astfel este satisfăcută coloana (2). Procedînd analog se găsește

$$x_{3,3} = 2; \quad x_{1,3} = 1,2 \text{ și } x_1 = 1,\ 8.$$

Această soluție este prezentată în tabelul (135).

Tabelul soluției inițiale

(135)

					a_i	u_i
$1,8 + \frac{3}{10}\theta$	3	$7 + \frac{\theta}{2}$	$1,2 - \frac{4}{5}\theta$	5	10	
	2	4	5	4	0	
	6	3	4			
	4	$2 - \theta$	0			
	2	2	4	4	8	
	2	2	3	3	1/2	
	4	3	2	5	7	
	3	3	5	4	−1	
			3	2		
b_j	24	32	16	20		
v_j	3/8	3/4	4/5	3/4		

Calculul variabilelor duale u_i *și* v_j. Deoarece x_1 este în bază, condițiile (IV.6.11) cer ca $u_1 = 0$; de asemenea trebuie satisfăcute condițiile

$$u_i + p_{ij}v_j = c_{ij}$$

pentru toți x_{ij} aparținînd bazei.

Aceste condiții în exemplul dat conduc la sistemul

$$\begin{aligned} u_1 + 4v_2 &= 3, & u_2 + 2v_2 &= 2, \\ u_1 + 5v_3 &= 4, & u_3 + 5v_3 &= 3, \\ u_2 + 4v_1 &= 2, & u_3 + 4v_4 &= 2, \end{aligned} \qquad \text{(IV.6.13)}$$

a cărui soluție este $u_1=0$; $u_2=\frac{1}{2}$; $u_3=-1$; $v_1=\frac{3}{8}$; $v_2=\frac{3}{4}$; $v_3=\frac{4}{5}$; $v_4=\frac{3}{4}$. Aceste valori au fost trecute și în tabelul care conține soluția inițială. Verificînd dacă sînt satisfăcute condițiile de optim pentru variabilele care nu aparțin bazei, se constată că programul poate fi îmbunătățit, deoarece $u_2 > 0$; $u_2 + p_{2,3}v_3 > c_{2,3}$ și $u_2 + p_{2,4}v_4 > c_{24}$.

Determinarea unei soluții îmbunătățite. Dacă variabila $x_{2,3}$ intră în bază cu valoarea $x_{2,3} = \theta$, constantele a_i și b_j se modifică astfel: $a'_1 = 10$; $a'_2 = 8 - \theta$; $a'_3 = 7$; $b'_1 = 24$; $b'_2 = 32$; $b'_3 = 16-4\theta$; $b'_4 = 20$, iar noile valori ale variabilelor din bază sînt funcții liniare de θ, de forma $\alpha + \beta\theta$, unde α este valoarea pe care o aveau înainte de modificare și $\beta\theta$ este modificarea cerută de includerea în bază a variabilei $x_{2,3}$ cu valoarea θ. Deoarece mărimile sînt cunoscute, trebuie calculate numai modificările $\beta\theta$ ale variabilelor din bază. Fie Δx_{ij} aceste mărimi. Sistemul de restricții ale problemei este verificat de noile valori atribuite variabilelor, dacă:

$$\begin{aligned} \Delta x_{1,0} + \Delta x_{1,2} + \Delta x_{1,3} &= 0, \\ \Delta x_{2,1} + \Delta x_{2,2} &= -\theta, \\ \Delta x_{3,3} + \Delta x_{3,4} &= 0, \\ 4\Delta x_{2,1} &= 0, \\ 4\Delta x_{1,2} + 2\Delta x_{2,2} &= 0, \\ 5\Delta x_{1,3} + 2\Delta x_{3,3} &= -4\theta, \\ 4\Delta x_{3,4} &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(IV.6.14)}$$

Primele trei ecuații din sistemul (IV.6.14) conțin, în membru întîi, suma modificărilor variabilelor din bază situate pe linia $i = 1$ 2, 3, iar în membrul al doilea modificarea constantelor a_i, $i = 1, 2, 30$ Ultimele patru ecuații din (IV.6.14) însumează în membrul întîi produsele $p_{ij}\Delta x_{ij}$ pentru variabilele din bază situate pe coloana $j = 1, 2, 3, 4$ și egalează aceste sume cu variația constantei b_j; $j = 1, 2, 3, 4$.

Generalizînd, se poate spune că într-o problemă de distribuire a sarcinilor cu o matrice $m \times n$, o soluție nedegenerată de bază conține $m + n$ valori nenule, fiindcă, spre deosebire de problemele de transport,

Scanned with OKEN Scanner

toate ecuaţiile sînt liniar independente. Determinarea modificărilor suferite de variabilele unei anumite baze prin intrarea unei noi variabile în bază necesită rezolvarea unui sistem de $m + n$ ecuaţii cu $m + n$ necunoscute. Se demonstrează că acest sistem este aproape triunghiular.

Soluţiile sistemului (IV.6.14) sînt

$$\Delta x_{1,0} = \frac{3}{10}\theta; \quad \Delta x_{1,2} = \frac{\theta}{2}; \quad \Delta x_{1,3} = -\frac{4}{5}\theta; \quad \Delta x_{2,2} = -\theta;$$

$$\Delta x_{2,1} = \Delta x_{3,3} = \Delta x_{3,4} = 0.$$

Aceste valori sînt trecute în tabelul soluţiei iniţiale. În urma modificărilor făcute, soluţia rămîne o soluţie realizabilă de bază dacă valorile noilor variabile sînt nenegative. Deoarece θ este valoarea care se atribuie unei variabile din bază, desigur că $\theta > 0$, iar condiţiile de nenegativitate a soluţiei sînt

$$1{,}2 - \frac{4}{5}\theta \geqslant 0 \quad \text{şi} \quad 2 - \theta \geqslant 0. \qquad \text{(IV.6.15)}$$

Inegalităţile sînt verificate pentru $\theta = 1{,}5$. Atribuind această valoare parametrului θ se găseşte următoarea soluţie a problemei propuse.

Tabelul soluţiei din iteraţia 1

(136)

					a_i / u_i
$2{,}25 - \frac{1}{2}\theta$	3 / 2	$7{,}75 + \frac{1}{2}\theta$ / 4 / 3	5 / 4	5 / 4	10 / 0
θ	6 / 4 / 2	$0{,}5 - \theta$ / 2 / 2	1,5 / 4 / 3	4 / 3	8 / 1/2
	4 / 3	3 / 3	2 / 5 / 3	5 / 4 / 2	7 / −1/8
b_j	24 / 3/8	32 / 3/4	16 / 5/8	20 / 17/32	

Cu aceasta se încheie aplicarea algoritmului, care constă din:

— calculul variabilelor duale u_j și v_j;

— aplicarea testului de optimalitate care poate conduce la una din concluziile: soluția este optimă sau soluția poate fi îmbunătățită; dacă soluția este optimă problema a fost rezolvată, în caz contrar se trece la

— determinarea modificării variabilelor în acord cu schimbarea bazei și calculul unei noi soluții realizabile de bază.

În tabelul de mai înainte sînt trecute valorile pentru u_i și v_j. Deoarece $u_2 > 0$ soluția nu este optimă, deși condițiile $u_i + p_{ij} v_j < c_{ij}$ sînt satisfăcute pentru toți x_{ij} care nu aparțin bazei. Luînd $x_2 = \theta$ se calculează modificările care se fac variabilelor de bază din sistemul

$$\begin{aligned}
\Delta x_{1,0} + \Delta x_{1,2} &= 0,\\
\Delta x_{2,1} + \Delta x_{2,2} + \Delta x_{2,3} &= -\theta,\\
\Delta x_{3,3} + \Delta x_{3,4} &= 0,\\
4\Delta x_{2,1} &= 0,\\
4\Delta x_{1,2} + 2\Delta x_{2,2} &= 0,\\
4\Delta x_{2,3} + 5\Delta x_{3,3} &= 0,\\
4\Delta x_{3,4} &= 0,
\end{aligned} \qquad \text{(IV.6.16)}$$

din care se găsește $\Delta x_{1,0} = -\frac{1}{2}\theta$; $\Delta x_{1,2} = \frac{1}{2}\theta$; $\Delta x_{2,2} = -\theta$; $\Delta x_{2,1} = \Delta x_{2,3} = \Delta x_{3,3} = \Delta x_{3,4} = 0$. Făcînd aceste modificări în tabelul anterior și scriind inegalitățile

$$2{,}25 - \frac{1}{2}\theta \geqslant 0; \qquad 0{,}5 - \theta \geqslant 0, \qquad \text{(IV.6.17)}$$

care exprimă condițiile de nenegativitate a soluției, se găsește valoarea $\theta = 0{,}5$, care dă posibilitatea de a construi soluția:

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul soluției optime

(137)

					a_i	u_i
2	3 2	8 4 3	5 4	5 4	10	0
0,5	6 4 2	2 2	1,5 4 3	4 3	8	0
	4 3	3 3	2 5 3	5 4 2	7	−3/4
b_j	24	32	16	20		
v_j	1/2	3/4	3/4	11/16		

Calculul valorilor u_i și v_j asociate acestei soluții îngăduie aplicarea testului de optimalitate, care conduce la concluzia că soluția nu mai poate fi îmbunătățită, deci că acest program este optim din punctul de vedere al minimizării costului. În scopul verificării se calculează valorile funcției obiectiv pentru cele trei soluții ale problemei și se găsește:

— costul pentru planul inițial: $z = 57{,}80$;
— costul pentru planul din iterația 1: $z = 56{,}75$;
— costul pentru planul optim: $z = 56{,}50$.

Planul optim cere ca planta P_1 să se cultive numai pe terenurile din categoria II, P_2 numai pe cele din categoria I, P_4 numai pe cele din categoria III, iar cultura plantei P_3 este împărțită pe terenuri din categoria II și III; gospodăria mai dispune de o suprafață excedentară față de sarcinile de plan, de 2,5 unități, care poate fi folosită pentru alte culturi.

Pentru expunerea și aplicarea algoritmului de rezolvare a problemelor de distribuire a sarcinilor având modelul

$$\begin{gathered} \sum_{j \in N} x_{ij} + x_i = a_i; \qquad i \in M, \\ \sum_{i \in M} p_{ij} x_{ij} = b_j; \qquad j \in N, \\ x_{ij} \geqslant 0 \\ \sum_{i \in M} x_i = w \text{ (maxim)}, \end{gathered} \tag{IV.6.18}$$

folosim exemplul I modificînd numai obiectivul planificării.

Scanned with OKEN Scanner

Problema care se pune este următoarea:

Exemplul II. Să se realizeze planul de producţie în condiţiile formulate în exemplul I, obiectivul fiind îndeplinirea planului cu folosirea unei suprafeţe totale minime de teren.

Pentru a stabili criteriile de optimalitate a unei soluţii realizabile de bază se notează cu u_i şi v_j variabilele duale şi se scrie dualul modelului (IV.6.18), în care grupul al doilea de restricţii a fost înmulţit cu -1. Precizăm că această modificare se face în scopul de a înlesni calculele ulterioare. Astfel, duala problemei (IV.6.18) este

$$\begin{aligned} u_i - p_{ij}v_j &\geqslant 0, \\ u_i &\geqslant 1, \\ \sum_i a_i u_i - \sum_j b_j v_j &= w \text{ (minim)}. \end{aligned} \tag{IV.6.19}$$

Criteriile de optim pentru o soluţie $X^\circ = \{x_{ij}^\circ, x_i^\circ\}$ sînt

$$\begin{aligned} &u_i - p_{ij}v_j = 0 \quad \text{pentru toţi } x_{ij} \in X^\circ \text{ sau } x_{ij} > 0, \\ &u_i - p_{ij}v_j > 0 \quad \text{pentru toţi } x_{ij} \notin X^\circ \text{ sau } x_{ij} = 0, \\ &u_i = 1 \quad \text{pentru toţi } x_i \in X^\circ \text{ sau } x_i > 0, \\ &u_i > 1 \quad \text{pentru toţi } x_i \notin X^\circ \text{ sau } x_i = 0. \end{aligned} \tag{IV.6.20}$$

Determinarea unei soluţii iniţiale dual realizabile. O soluţie dual realizabilă poate fi găsită înlocuind constantele a_i prin θa_i, unde θ este un parametru nenegativ.

Grupul al doilea de restricţii din sistemul (IV.6.18) este satisfăcut dacă pentru fiecare ecuaţie, o singură variabilă x_{ij} ia o valoare nenulă, şi anume:

$$x_{ij} = \frac{b_j}{\max\limits_i p_{ij}}. \tag{IV.6.21}$$

Datorită naturii particulare a sistemului (IV.6.18), care constă în aceea că fiecare variabilă x_{ij} figurează numai într-o singură ecuaţie din primul grup şi într-o singură ecuaţie din grupul al doilea, se pot calcula valorile variabilelor x_i după ce s-au atribuit variabilelor x_{ij} valorile date de (IV.6.21). Avem

$$x_i = \theta a_i - \sum_i \frac{b_j}{\max\limits_i p_{ij}}. \tag{IV.6.22}$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţia astfel construită este realizabilă pentru

$$\theta_1 = \theta \geqslant \max_{(ij)} \left[\frac{1}{a_i} \sum_i \frac{b_j}{\max\limits_i p_{ij}} \right]. \qquad \text{(IV.6.23)}$$

Această soluţie este optimă pentru $\theta \geqslant \theta_1$. În adevăr, luînd

$$u_i = 1 \text{ pentru toţi } i \in M$$

şi

$$v_j = \frac{1}{\max\limits_i p_{ij}}, \qquad \text{(IV.6.24)}$$

este uşor de văzut că se verifică toate condiţiile (IV.6.20). Dacă valoarea parametrului θ care rezultă din (IV.6.23) este mai mică decît 1, soluţia dată de formulele (IV.6.21) şi (IV.6.22) este optimă şi pentru problema iniţială. În caz contrar, pentru $\theta < \theta_1$ cel puţin una dintre variabilele x_i devine negativă şi trebuie exclusă din bază. Schimbarea bazei se poate face cu uşurinţă folosind graful asociat soluţiei. Referindu-ne la exemplul numeric, modelul problemei este

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=4}^{7} x_{1j} + x_1 = 10, && \sum_{i=1}^{3} p_{i4} x_{i1} = 24, \\
&\sum_{j=4}^{7} x_{2j} + x_2 = 8, && \sum_{i=1}^{3} p_{i5} x_{i2} = 32, \\
&\sum_{j=1}^{7} x_{3j} + x_3 = 7, && \sum_{i=1}^{3} p_{i6} x_{i3} = 16, \\
& && \sum_{i=1}^{3} p_{i7} x_{i4} = 20,
\end{aligned} \qquad \text{(IV.6.25)}$$

cu obiectivul

$$\max w = x_1 + x_2 + x_3. \qquad \text{(IV.6.26)}$$

Observaţie. Indicelui $j = 1, \ldots, n$ i se atribuie valorile $j = m + 1, \ldots, m + n$, pentru a evita confuziile în reprezentarea grafului asociat bazei.

O soluţie a sistemului (IV.6.24) este

$$\begin{aligned}
&x_{2,4} = 6; && x_{1,5} = 8 && x_{3,6} = 3{,}2; && x_{1,7} = 4, \qquad \text{(IV.6.27)} \\
&x_1 = 10\theta - 12; && x_2 = 8\theta - 6; && x_3 = 7\theta - 3{,}2.
\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această soluţie este realizabilă pentru $\theta \geqslant 1,2$, dar nu şi pentru problema propusă în care $\theta = 1$. Graful asociat soluţiei (IV.6.27) se compune din trei arbori disjuncţi fiecare, fiind conectat cu o buclă asociată variabilei x_i. Nodurile 1, 2, 3 reprezintă ecuaţiile-linie, iar nodurile 4, 5, 6, 7 ecuaţiile-coloană ale sistemului (IV.6.25); arcele reprezintă variabilele din bază.

Pe fig. 16 sînt scrise şi valorile variabilelor duale. Deoarece toate variabilele x_i, $i = 1, 2, 3$ aparţin bazei, conform condiţiilor (IV.6.20)

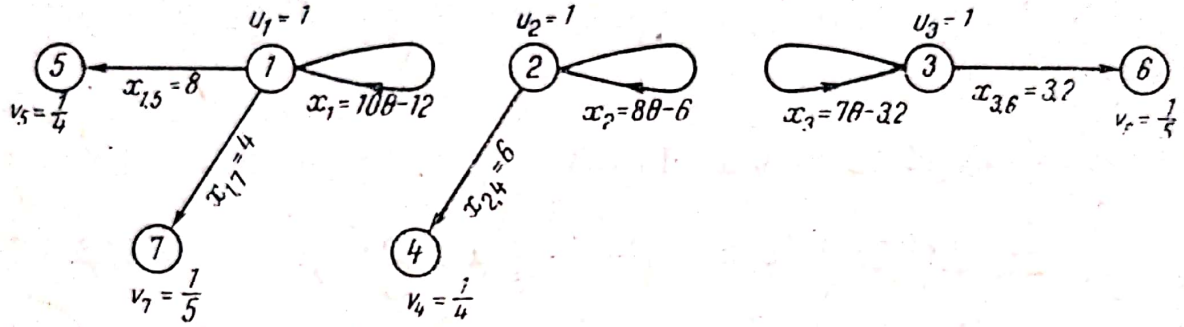


Fig. 16. *Graful bazei în iteraţia 0*

avem $u_i = 1$ pentru $i = 1, 2, 3$. Valorile variabilelor duale asociate ecuaţiilor coloană, deci nodurilor 4, 5, 6 şi 7, se calculează din relaţia

$$v_j = \frac{1}{\max\limits_i p_{ij}},$$

deci

$$v_4 = \frac{1}{\max\limits_i p_{i4}} = \frac{1}{4} \text{ etc.}$$

Pentru $\theta < 1,2$ variabila $x_1 < 0$ şi iese din bază, astfel că variabila duală asociată primei ecuaţii (nodului 1) trebuie să ia o valoare $u_i = \mu > 1$. Această modificare se face pentru ca valorile variabilelor v_j asociate nodurilor conectate în graf cu nodul 1 să se amplifice cu μ, deoarece prima condiţie din (IV.6.20) este omogenă. În adevăr, v_5 şi v_7 trebuie să satisfacă egalităţile

$$\mu - 4v_5' = 0, \qquad \mu - 5v_7' = 0,$$

deoarece x_{15} şi x_{17} aparţin bazei; deci,

$$v_5' = \frac{1}{4}\mu; \qquad v_7' = \frac{1}{5}\mu.$$

Scanned with OKEN Scanner

Variabilele duale asociate celorlalte noduri nu se modifică. Acum trebuie determinată variabila care intră în bază, respectînd condiţia ca noua soluţie să rămînă dual realizabilă, adică variabilele duale să satisfacă restricţiile (IV.6.20), care pentru exemplul ales sînt

$$u_i - p_{ij} v_j = 0; \qquad i = 2, 3 \qquad j = 5, 7,$$

adică

$$\begin{aligned}
&u_2 - p_{2,5} v'_5 \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} \mu \geqslant 0; \quad \mu \leqslant 2,\\
&u_2 - p_{2,7} v'_7 \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad 1 - 4 \cdot \frac{1}{5} \mu \geqslant 0; \quad \mu \leqslant \frac{5}{4} = 1,2,\\
&u_3 - p_{3,5} v'_5 \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad 1 - 3 \cdot \frac{1}{4} \mu \geqslant 0; \quad \mu \leqslant \frac{4}{3} = 1,(3),\\
&u_3 - p_{3,7} v'_7 \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad 1 - 4 \cdot \frac{1}{5} \mu \geqslant 0; \quad \mu \leqslant \frac{5}{4} = 1,2.
\end{aligned} \tag{IV.6.28}$$

Este uşor de văzut că toate inegalităţile sînt satisfăcute pentru $\mu = \min_j \frac{1}{p_{ij}} = 1{,}2$. Dacă valoarea obţinută pentru μ era subunitară, soluţia găsită prin schimbarea bazei nu era dual realizabilă, deoarece nodului 1 i s-ar fi asociat variabila duală $u_1 = \mu < 1$. Din relaţiile (IV.6.28) rezultă că pentru $u = 1{,}2$ se anulează $u_2 - p_{27}\, v'_7$ şi $u_3 - p_{37} v'_7$, astfel încît oricare dintre variabilele $x_{2,7}$, $x_{3,7}$ poate intra în bază. Dacă alegerea se opreşte asupra variabilei $x_{2,7}$, graful asociat

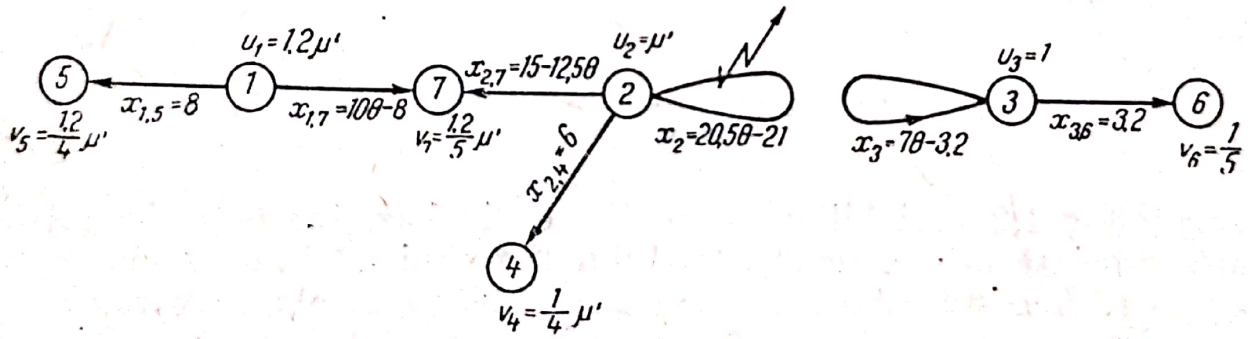


Fig. 17. *Graful bazei în iteraţia 1*

noii soluţii este cel din fig. 17, în care s-au trecut şi valorile variabilelor din bază. Soluţia găsită este realizabilă dacă:

$$\begin{aligned}
&x_{1,7} \geqslant 0, \text{ adică} \quad 10\theta - 8 \geqslant 0; \quad \theta \geqslant 0{,}8,\\
&x_{2,7} \geqslant 0, \text{ adică} \quad 15 - 12{,}5\theta \geqslant 0; \quad \theta \leqslant 1{,}2,\\
&x_2 \geqslant 0, \text{ adică} \quad 20{,}5\theta - 21 \geqslant 0; \quad \theta \geqslant 1{,}02,\\
&x_3 \geqslant 0, \text{ adică} \quad 7\theta - 3{,}2 \geqslant 0; \quad \theta \geqslant 0{,}46.
\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din rezultatele anterioare reiese că soluția este realizabilă pentru $\theta \geqslant 1{,}02$. Pentru $\theta < 1{,}02$ variabila x_2 devine negativă și trebuie scoasă din bază. Luînd $u_2 = \mu'$, valorile variabilelor v_4, v_7, u_1 și v_5 se amplifică cu μ, iar u_3 și v_6 nu se modifică. În vederea determinării variabilei care intră în bază, în locul lui x_2 se scriu inegalitățile

$$
\begin{aligned}
&u_1 - p_{1,6}v_6 \geqslant 0; \quad 1{,}2\mu' - 5\cdot\frac{1}{5} \geqslant 0; \quad \mu' \geqslant \frac{1}{1{,}2} = 0{,}83,\\
&u_2 - p_{2,6}v_6 \geqslant 0; \quad \mu' - 4\cdot\frac{1}{5} \geqslant 0; \quad \mu' \geqslant \frac{4}{5} = 0{,}8,\\
&u_3 - p_{3,4}v_4 \geqslant 0; \quad 1 - 4\cdot\frac{1}{4}\mu' \geqslant 0; \quad \mu' \leqslant 1, \qquad \text{(IV.6.28)}\\
&u_3 - p_{3,5}v_5 \geqslant 0; \quad 1 - 3\cdot\frac{1{,}2}{4}\mu' \geqslant 0; \quad \mu' \leqslant \frac{1}{0{,}9} = 1{,}1,\\
&u_3 - p_{3,7}v_7 \geqslant 0; \quad 1 - 4\cdot\frac{1{,}2}{5}\mu' \geqslant 0; \quad \mu' \leqslant \frac{1}{0{,}96} = 1{,}04.
\end{aligned}
$$

Din (IV.6.28) rezultă că pentru $\mu' = 1$ diferența $u_3 - p_{3,4}v_4 = 0$ și toate celelalte inegalități sînt satisfăcute, deci $x_{3,4}$ intrînd în bază în locul lui x_2 se obține o nouă soluție dual-realizabilă, al cărei graf este dat în fig. 18.

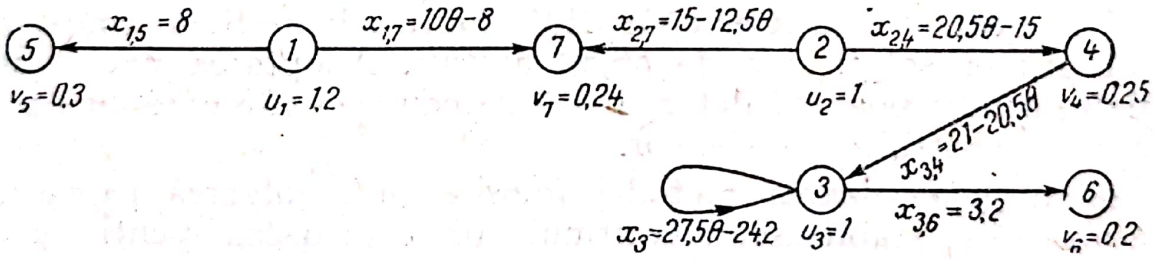


Fig. 18. *Graful bazei în iterația 2*

Recalculînd valorile variabilelor din bază se constată că toate sînt pozitive pentru $\theta = 1$, deci soluția fiind realizabilă și dual-realizabilă este optimă. Planul se realizează pe o suprafață mai mică cu 3,3 unități decît totalul suprafețelor disponibile; excedentul apare în terenurile de categoria a treia, deoarece $x_3 \neq 0$ în soluția optimă. Pentru a înlesni o comparație între soluțiile optime ale celor două exemple se poate folosi următorul tabel:

Scanned with OKEN Scanner

Notația		Soluția optimă pentru obiectivul					
		Cost minim			Suprafața excedentară maximă		
		Suprafețe cultivate categoria					
I	II	1	2	3	1	2	3
P_1	P_4		6			5,5	0,5
P_2	P_5	8			8		
P_3	P_6		1,5	2			3,2
P_4	P_7			5	2	2,5	
Suprafața excedentară		2	0,5				3,3
Suprafața totală		10	8	7	10	8	7

Prin aplicarea planului optim în exemplul I rămîne disponibilă o suprafață de 2,5 unități, în timp ce suprafața excendentară din soluția exemplului II este de 3,3 unități. Costul cultivării terenurilor în cadrul ultimei soluții este de 61,6 unități băneşti, în timp ce în cadrul primei soluții era de 56,50 unități. Adoptarea uneia sau a celeilalte soluții poate fi determinată de considerente care nu au fost incluse în construirea modelelor.

Pentru generalizarea metodei folosite în rezolvarea exemplului II rămîne să se stabilească algoritmul care se utilizează pentru schimbarea bazei.

În soluția inițială, toate variabilele x_i, care pot fi numite variabile de abatere, aparțin bazei iar graful asociat bazei inițiale se compune întotdeauna din atîția arbori disjuncți cîte ecuații-linie conține sistemul, fiecare arbore fiind conectat cu o buclă. Pentru o anumită valoare a parametrului $\theta = \theta_1$, o variabilă de abatere x_k devine negativă. Variabila x_k trebuie scoasă din bază şi bucla asociată ei trebuie ştearsă din graf. Pentru a determina variabila care intră în bază se procedează astfel:

— se înlocuieşte $u_k = 1$ prin $u'_k = \mu$;

Scanned with OKEN Scanner

— toate variabilele duale asociate nodurilor conectate cu nodul k se amplifică cu μ, deoarece condiţiile

$$u_i - p_{ij}\, v_j = 0$$

trebuie să rămînă satisfăcute după ce u_k se înlocuieşte cu u'_k.

Fie $N_1 = \{j_1, \ldots, j_s\}$ mulţimea nodurilor conectate cu nodul k. Arcul care se introduce în graf în locul buclei x_k poate fi:

a) un arc care leagă nodul k cu unul din nodurile care nu aparţin mulţimii N_1, sau

b) un arc care leagă un nod din N_1 cu un nod care nu aparţine mulţimii N_1.

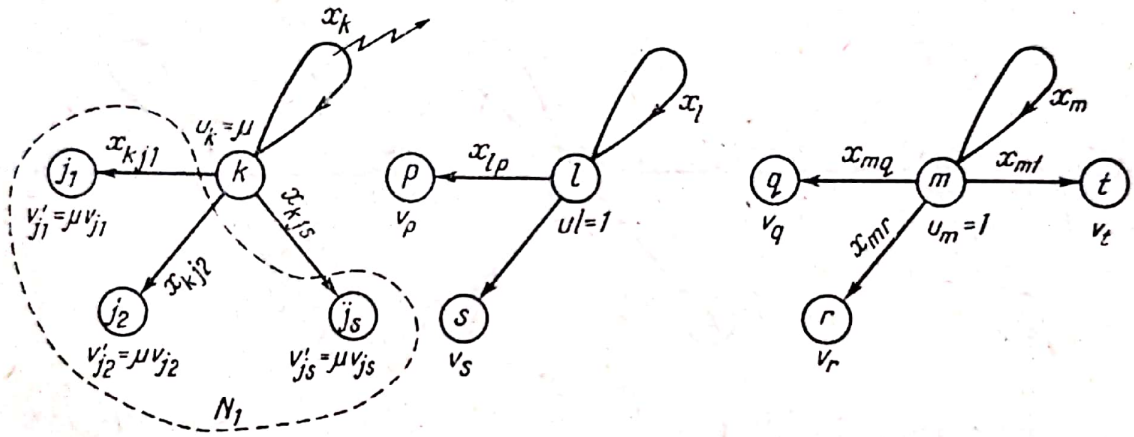


Fig. 19. *Graful unei soluţii iniţiale.*

Soluţia nouă rămîne dual-realizabilă dacă pentru orice arc care nu figurează în graf sînt satisfăcute condiţiile

$$u_i \geqslant 1\,;\; u_i - p_{ij}\, v_j \geqslant 0.$$

Arcele din grupa (a), după înlocuirea $u'_k = \mu$, vor satisface condiţiile

$$u'_k - p_{ij} \cdot v_j = \mu - p_{ij}\, v_j \geqslant 0 \text{ pentru orice } i \neq k \text{ şi } j \notin N_1$$

sau

$$\mu \geqslant p_{ij} v_j. \qquad \text{(IV.6.29)}$$

Deoarece $v_j = \dfrac{1}{\max\limits_i p_{ij}}$, produsul $p_{ij} v_j$ este cel mult egal cu 1 şi condiţiile (IV.6.29) se reduc la

$$\mu \geqslant 1. \qquad \text{(IV.6.30)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru arcele din grupa (b) avem

$$u_i - p_{ij}v'_j = 1 - p_{ij}v_{ij}\mu \geqslant 0 \text{ pentru orice } i \neq k \text{ şi } j \in N_1$$

($u_i = 1$ deoarece în soluţia iniţială toate variabilele x_i aparţin bazei). Aceste condiţii sînt satisfăcute pentru

$$\mu \leqslant \max_{(ij)} \left\{ \frac{1}{p_{ij}\, v_{ij}} \; ; \; j \in N_1,\ i \neq k \right\}. \qquad \text{(IV.6.31)}$$

Dacă $\dfrac{1}{p_{lj_s}v_{lj_s}} = \max\limits_{(ij)} \dfrac{1}{p_{ij}v_{ij}}$ şi această valoare este cel puţin egală cu 1 [condiţia (IV.6.30)], variabila x_{lj_s} intră în bază în locul lui x_k. Graful noii baze este redat în fig. 20.

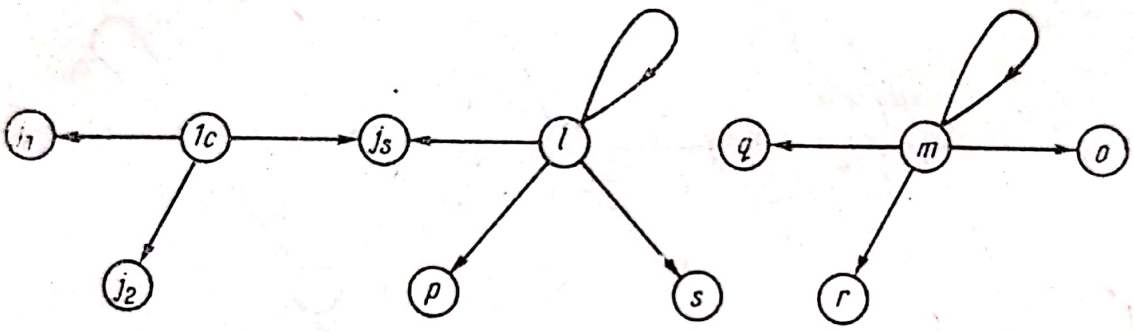


Fig. 20

Dacă μ dat de (IV.6.31) este subunitar, problema nu admite soluţii pentru $\theta < \theta_1$.

Să admitem acum că într-o iteraţie oarecare, pentru $\theta < \theta^*$ o variabilă de bază devine negativă. Această variabilă poate fi o variabilă de structură sau o variabilă de abatere. Vom discuta fiecare din aceste situaţii.

Fie $x_{pq} < 0$ pentru $\theta < \theta^*$. Se pot prezenta două situaţii, şi anume:

Cazul I. Nodul p aparţine unui subgraf fără bucle (F) şi q unui subgraf cu bucle (G) (fig. 21). Nodurile haşurate aparţin subgrafului F şi celelalte lui G.

Dacă x_p iese din bază, u_p se înlocuieşte cu $u'_p = \mu u_p$ şi toate variabilele duale asociate nodurilor din F se amplifică cu μ, deoarece condiţiile $u_i - p_{ij}v_j = 0$ trebuie să rămînă satisfăcute. Variabilele asociate nodurilor din G nu se modifică. Fie x_{rs} variabila care intră în bază în locul lui x_{pq}. Deoarece

$$p \in F \text{ şi } q \in G,$$

pentru x_{rs} vom avea

$$r \in G \text{ şi } s \in F,$$

deci condiţiile în care soluţia rămîne dual realizabilă sînt de forma

$$u_i - p_{ij}\, v_j\, \mu \geqslant 0\,;\ i \in G \text{ şi } j \in F.$$

Aceste condiţii sînt îndeplinite pentru

$$\mu = \min_{(i,j)} \left\{ \frac{u_i}{p_{ij}\, v_j}\, i \in G,\ j \in F \right\}. \qquad \text{(IV.6.32)}$$

Dacă $\frac{u_r}{p_{rs}\, v_j} = \min_{(i,j)} \frac{u_i}{p_{ij}\, v_j}$ variabila x_{rs} intră în bază.

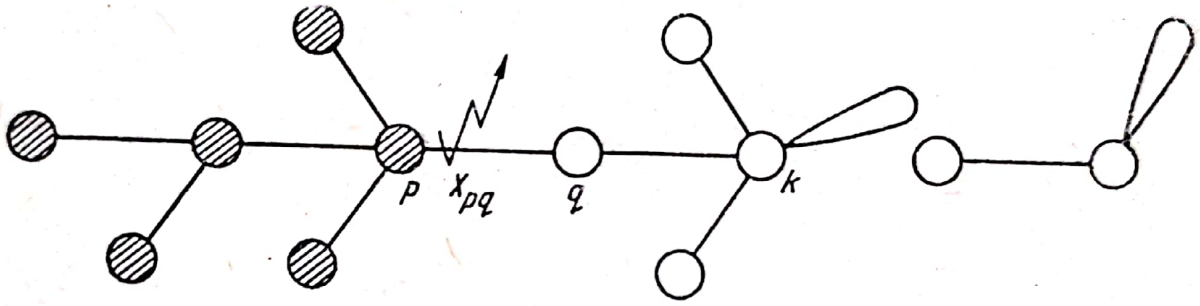


Fig. 21

Dacă valoarea lui μ din (IV.6.32) este subunitară nu există soluţie optimă pentru $\theta < \theta^*$.

Cazul II. Nodul p aparţine unui subgraf cu bucle (G) şi q unui subgraf fără bucle (F) (fig. 22).

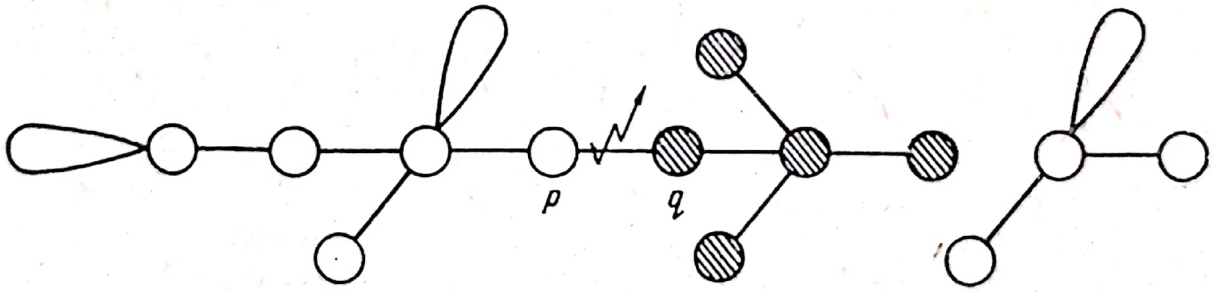


Fig. 22

Fie x_{rs} sau x_r variabila care va înlocui în bază pe x_{pq}. Deoarece

$$p \in G \quad \text{şi} \quad q \in F,$$

pentru x_{rs} sau x_k vom avea

$$r \in F \quad \text{şi} \quad s \in G \text{ sau } k \in F.$$

În acest caz v_q se înlocuieşte cu $v'_q = \mu' v_q$, deci, ca şi în cazul precedent, numai variabilele asociate nodurilor din subgraful fără bucle F se înmulţesc cu μ. Soluţia este dual-realizabilă dacă

$$u'_i - p_{ij} v_j = u_i \mu' - p_{ij} v_j \geqslant 0 ; \qquad i \in F ; \; j \in G.$$

Aceste condiţii sînt îndeplinite pentru

$$\left\{ \mu' = \max_{(i,j)} \frac{p_{ij} v_j}{u_i}, \; i \in F, \; j \in G \right\} \tag{IV.6.33}$$

Pentru nodurile $i \in F$ trebuie să fie îndeplinite condiţiile

$$u_i \mu'' \geqslant 1,$$

care sînt satisfăcute dacă

$$\mu'' = \max_i \left\{ \frac{1}{u_i}, \; i \in F \right\}. \tag{IV.6.34}$$

Fie

$$\frac{p_{rs} v_s}{u_s} = \max_{ij} \left\{ \frac{p_{ij} v_j}{u_i} \right\} = \mu'$$

şi

$$u_k = \max_i \left\{ \frac{1}{u_i} \right\} = \mu'' ;$$

— dacă $\mu' > \mu''$ variabila x_{rs} intră în bază ;
— dacă $\mu'' > \mu'$ variabila x_k intră în bază.

Observaţie. În primul caz, valoarea parametrului μ dată de (IV.6.32) trebuie să fie subunitară, pentru ca să existe o soluţie optimă pentru $\theta < \theta^*$. În al doilea caz, din (IV.6.33) şi (IV.6.34) reiese că μ' şi μ'' sînt subunitari.

§ 7. PROBLEME MULTIDIMENSIONALE DE TRANSPORT

Problemele de transport cu mai multe dimensiuni apar în aplicaţiile practice, în cazurile în care centrele de consum trebuie aprovizionate cu diferite mărfuri care nu se pot înlocui între ele. De exemplu, un şantier de construcţii se aprovizionează cu diferite materiale : ciment de diferite calităţi, cărămizi, var, nisip, plăci semifabricate etc. Se ştie că ponderea cu care participă transportul în

Scanned with OKEN Scanner

prețul final al materialelor de construcție de masă este de 22% pentru ciment, 20% pentru cărămizi și pînă la 70% pentru materiale de balastieră și că transportul acestor materiale ocupă 30% din volumul total al transporturilor pe căile ferate. Aceste date pun în evidență importanța organizării optime a planului de aprovizionare a șantierelor cu materiale de construcții. Optimizînd aprovizionarea cu fiecare din materialele necesare nu se obține planul optim pe totalitatea cerințelor. Astfel de probleme constituie o generalizare a problemelor de transport și au fost tratate de Gass [34], Schell [67] și Haley [40]. Noi le vom numi probleme multidimensionale de transport. Pentru formularea modelului matematic al acestor probleme considerăm cazul tridimensional. Variabilele modelului vor fi, deci, afectate de trei indici, și anume:

$i \in \{1, 2, \ldots\ldots, m\} = M$ reprezintă fabrica sau depozitul;
$j \in \{1, 2, \ldots\ldots, n\} = N$ reprezintă produsul;
$k \in \{1, 2, \ldots\ldots, p\} = K$ reprezintă consumatorul.

Variabilele x_{ijk} satisface restricțiile

$$\sum_{i \in M} x_{ijk} = a_{jk}; \quad j \in N; \quad k \in K,$$

$$\sum_{j \in N} x_{ijk} = b_{ki}; \quad k \in K; \quad i \in M,$$

$$\sum_{k \in K} x_{ijk} = e_{ij}; \quad i \in M; \quad j \in N, \tag{IV.7.1}$$

$$x_{ijk} \geqslant 0 \qquad i \in M; \qquad j \in N; \qquad k \in K$$

obiectivul urmărit fiind minimizarea funcției

$$Z = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} c_{ijk}\, x_{ijk}, \tag{IV.7.2}$$

cu respectarea condițiilor suplimentare

$$\sum_j a_{jk} = \sum_i b_{ki}; \quad \sum_k b_{ki} = \sum_j e_{ij}; \quad \sum_i e_{ij} = \sum_k a_{jk},$$

$$\sum_j \sum_k a_{jk} = \sum_k \sum_i b_{ki} = \sum_i \sum_j e_{ij}, \tag{IV.7.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde s-a notat cu:

a_{jk} necesarul de produse j la consumatorul k;

b_{ki} cantitatea de produse cerute de consumatorul k producătorului i;

e_{ij} disponibilul de produse j la producătorul i.

Modelul conține $(mp + np + mn)$ ecuații, dintre care $(m + n + p - 1)$ sînt combinații liniare ale celorlalte, în baza condițiilor suplimentare (IV.7.3) care asigură, ca și în problemele obișnuite de transport, existența unei soluții. Din aceste considerente rezultă că o soluție nedegenerată de bază conține

$$mnp - (m - 1)(n - 1)(p - 1)$$

valori nenule. În problemele bidimensionale de transport cu m producători și n consumatori, modelul are $(m + n - 1)$ ecuații liniare independente, iar o soluție nedegenerată de bază conține

$$mn - (m - 1)(n - 1)$$

valori nenule. Aceste observații pot da loc la generalizări pentru probleme similare multidimensionale.

Determinarea unei soluții de bază. Pentru determinarea unei soluții de bază se folosesc aceleași metode ca în problemele obișnuite de transport. Metoda unghiului nord-vest, cu toate dezavantajele cunoscute, este preferabilă în cazul multidimensional, din cauza simplității cu care se obține o soluție inițială de bază.

Soluția de bază în problemele de transport bidimensionale este totdeauna realizabilă; în cazul multidimensional se ajunge uneori la o soluție nerealizabilă, deși problema propusă admite soluții. În aceste cazuri se procedează la excluderea din bază a variabilelor negative. Pentru determinarea unei soluții de bază, datele problemei se prezintă sub forma unui tabel. Vom expune metoda de rezolvare folosind următorul exemplu.

Exemplul I. Trei fabrici A, B, C produc două calități de ciment M și P, care sînt solicitate de patru șantiere S_1, S_2, S_3, S_4. Datele sînt următoarele:

— producția totală a fabricii A este de 1 000 t, din care 300 t ciment M și 700 t ciment P

producția totală a fabricii B este de 800 t din care 400 t ciment M și 400 t ciment P

producția totală a fabricii C este de1 200 t din care 400 t ciment M și 800 t ciment P.

Scanned with OKEN Scanner

Cererile șantierelor sînt:

(139)

Șantierul	Ciment		De la fabrica		
	M	P	A	B	C
S_1	100	600	100	200	400
S_2	500	400	300	300	300
S_3	150	600	500	50	200
S_4	350	300	100	250	300
Total	1100	1900	1000	800	1200

Datele problemei satisfac condițiile (IV.7.3) Pentru determinarea soluției inițiale se folosește tabelul (140), în care sînt trecute variabilele x_{ijk}, mărimile a_{jk}, b_{ki} și l_{ij}. Soluția s-a găsit astfel:

$$x_{1,1,1} = \min(a_{1,1},\ b_{1,1},\ e_{1,1}) = \min\,(100,\ 100,\ 300) = 100 = a_{1,1} = b_{1,1}.$$

Se înlocuiește $a_{1,1}$ prin $a'_{1,1} = \varepsilon$; $b_{1,1} = 0$ și $e_{1,1}$ prin $e'_{1,1} = 300 - 100 = 200$.

Deoarece $b'_{1,1} = 0$ se ia $x_{1,2,1} = 0$. Pentru $a'_{1,1}$ se ia valoarea ε în loc de zero, cu scopul de a evita degenerarea soluției. În continuare avem

$$x_{1,1,2} = \min\,(a_{1,2},\ b_{2,1},\ e'_{1,1}) = \min\,(500,\ 300,\ 200\,) = 200 = e'_{1,1}.$$

Deoarece acum $e''_{1,1} = e'_{1,1} - 200 = 0$, avem $x_{1,1,3} = x_{1,1,4} = 0$ și $a'_{1,2} = 300$; $b'_{2,1} = 100$.

Trecînd în pătratul alăturat, în care s-a atribuit deja valoarea zero variabilei $x_{1,2,1}$, avem

$$x_{1,2,2} = \min(a_{2,1},\ b'_{2,1},\ e_{1,2}) = \min\ (600,\ 100,\ 700) = 100 = b'_{2,1}.$$

Prin raționamente asemănătoare se completează soluția care conține 18 valori nenule, deoarece

$$mnp - (m-1)(n-1)(p-1) = 3 \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția în iterația 0

(140)

$x_{1,1,1} = 100$ $x_{1,1,2} = 200$ $x_{1,1,3}$ $x_{1,1,4}$ $e_{1,1} = 300$	$x_{1,2,1}$ $x_{1,2,2} = 100$ $x_{1,2,3} = 500$ $x_{1,2,4} = 100$ $e_{1,2} = 700$	$b_{1,1} = 100$ $b_{2,1} = 300$ $b_{3,1} = 500$ $b_{4,1} = 100$
$x_{2,1,1}$ $x_{2,1,2} = 300 - \theta$ $x_{2,1,3} = 50$ $x_{2,1,4} = 50 + \theta$ $e_{2,1} = 400$	$x_{2,2,1} = 200$ $x_{2,2,2} = \theta$ $x_{2,2,3}$ $x_{2,2,4} = 200 - \theta$ $e_{2,2} = 400$	$b_{1,2} = 200$ $b_{2,2} = 300$ $b_{3,2} = 50$ $b_{4,2} = 250$
$x_{3,1,1} = \varepsilon$ $x_{3,1,2} = \varepsilon + \theta$ $x_{3,1,3} = 100$ $x_{3,1,4} = 300 - \theta$ $e_{3,1} = 400 + 2\varepsilon$	$x_{3,2,1} = 400$ $x_{3,2,2} = 300 - \theta$ $x_{3,2,3} = 100$ $x_{3,2,4} = \varepsilon + \theta$ $e_{3,2} = 800 + \varepsilon$	$b_{1,3} = 400 + \varepsilon$ $b_{2,3} = 300 + \varepsilon$ $b_{3,3} = 200$ $b_{4,3} = 300 + \varepsilon$
$a_{1,2} = 100 + \varepsilon$ $a_{1,2} = 500 + \varepsilon$ $a_{1,3} = 150$ $a_{1,4} = 350$	$a_{2,1} = 600$ $a_{2,2} = 400$ $a_{2,3} = 600$ $a_{2,4} = 300 + \varepsilon$	

Valorile atribuite variabilelor satisfac cele trei tipuri de ecuații din sistemul (IV.7.1). Astfel avem

$$x_{1,1,1} + x_{2,1,1} + x_{3,1,1} = a_{1,1}\,;\ 100 + 0 + \varepsilon = 100 + \varepsilon, \qquad \text{(IV.7.4)}$$

unde ε sînt mărimi foarte mici care s-au adăugat constantelor pentru a evita degenerarea soluției. În total, sistemul conține 8 egalități asemănătoare cu (IV.7.4). Soluția verifică de asemenea 12 egalități de forma

$$x_{1,1,1} + x_{1,2,1} = b_{1,1}\,;\quad 100 + 0 = 100$$

și 6 egalități de forma

$$x_{1,1,1} + x_{1,1,2} + x_{1,1,3} + x_{1,1,4} = e_{1,1}\,;\ 100 + 200 + 0 + 0 = 300,$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluția în iterația 0

(140)

$x_{1,1,1} = 100$ $x_{1,1,2} = 200$ $x_{1,1,3}$ $x_{1,1,4}$ $e_{1,1} = 300$	$x_{1,2,1}$ $x_{1,2,2} = 100$ $x_{1,2,3} = 500$ $x_{1,2,4} = 100$ $e_{1,2} = 700$	$b_{1,1} = 100$ $b_{2,1} = 300$ $b_{3,1} = 500$ $b_{4,1} = 100$
$x_{2,1,1}$ $x_{2,1,2} = 300 - \theta$ $x_{2,1,3} = 50$ $x_{2,1,4} = 50 + \theta$ $e_{2,1} = 400$	$x_{2,2,1} = 200$ $x_{2,2,2} = \theta$ $x_{2,2,3}$ $x_{2,2,4} = 200 - \theta$ $e_{2,2} = 400$	$b_{1,2} = 200$ $b_{2,2} = 300$ $b_{3,2} = 50$ $b_{4,2} = 250$
$x_{3,1,1} = \varepsilon$ $x_{3,1,2} = \varepsilon + \theta$ $x_{3,1,3} = 100$ $x_{3,1,4} = 300 - \theta$ $e_{3,1} = 400 + 2\varepsilon$	$x_{3,2,1} = 400$ $x_{3,2,2} = 300 - \theta$ $x_{3,2,3} = 100$ $x_{3,2,4} = \varepsilon + \theta$ $e_{3,2} = 800 + \varepsilon$	$b_{1,3} = 400 + \varepsilon$ $b_{2,3} = 300 + \varepsilon$ $b_{3,3} = 200$ $b_{4,3} = 300 + \varepsilon$
$a_{1,2} = 100 + \varepsilon$ $a_{1,2} = 500 + \varepsilon$ $a_{1,3} = 150$ $a_{1,4} = 350$	$a_{2,1} = 600$ $a_{2,2} = 400$ $a_{2,3} = 600$ $a_{2,4} = 300 + \varepsilon$	

Valorile atribuite variabilelor satisfac cele trei tipuri de ecuații din sistemul (IV.7.1). Astfel avem

$$x_{1,1,1} + x_{2,1,1} + x_{3,1,1} = a_{1,1}\,;\ 100 + 0 + \varepsilon = 100 + \varepsilon, \qquad \text{(IV.7.4)}$$

unde ε sînt mărimi foarte mici care s-au adăugat constantelor pentru a evita degenerarea soluției. În total, sistemul conține 8 egalități asemănătoare cu (IV.7.4). Soluția verifică de asemenea 12 egalități de forma

$$x_{1,1,1} + x_{1,2,1} = b_{1,1}\,;\quad 100 + 0 = 100$$

și 6 egalități de forma

$$x_{1,1,1} + x_{1,1,2} + x_{1,1,3} + x_{1,1,4} = e_{1,1}\,;\ 100 + 200 + 0 + 0 = 300,$$

Scanned with OKEN Scanner

adică

$$mn + mp + np = 3 \times 2 + 3 \times 4 + 2 \times 4 = 6 + 12 + 8 = \\ = 26 \text{ ecuații.}$$

Testul de optimalitate. Pentru a construi dualul modelului (IV.7.1) — (IV.7.2) se notează cu u_{jk}, v_{ki} și w_{ij} variabilele duale. Ca și în cazul problemelor de transport bidimensionale, găsim că o soluție este optimă dacă

$$u_{jk} + v_{ki} + w_{ij} = c_{ijk} \quad \text{pentru toți } x_{ijk} \in B \text{ sau } x_{ijk} \neq 0 \qquad \text{(IV.7.5)}$$

și dacă

$$u_{jk} + v_{ki} + w_{ij} \leqslant c_{ijk} \quad \text{pentru toți } x_{ijk} \notin B \text{ sau } x_{ijk} = 0. \qquad \text{(IV.7.6)}$$

Calculul variabilelor duale. Pentru a calcula variabilele duale se construiesc tabele bidimensionale corespunzătoare indicilor $k = 1, 2, \ldots, p$, în care se înregistrează soluția găsită și valorile c_{ijk}. În exemplul dat avem 26 variabile duale, care sînt determinate prin 18 condiții de forma (IV.7.5). Sistemul este nedeterminat și se pot atribui valori arbitrare unui număr de $26 - 18 = 8$ variabile duale. Cel puțin unul din tabelele bidimensionale conține o soluție de bază în sensul problemelor de transport obișnuite, adică cu $(m + n - 1)$ valori nenule. În acest tabel se iau toate variabilele duale w_{ij} corespunzătoare variabilelor din bază, egale cu zero, și o variabilă u_{jk} sau v_{ki} nulă. Din relațiile (IV.7.5) se calculează unele dintre celelalte variabile duale ale tabelului.

Variabilele duale pentru iterația 0

(141)

i \ j	$u_{1,1} = 0$	$u_{2,1} = 1$
$v_{1,1} = 2$	$x_{1,1,1} = 100$ $w_{1,1} = 0$ $c_{1,1,1} = 2$	(-2) $w_{1,2} = -1$ $c_{1,2,1} = 4$
$v_{1,2} = 2$	(-4) $w_{2,1} = -1$ $c_{2,1,1} = 5$	$x_{2,2,1} = 200$ $w_{2,2} = 0$ $c_{2,2,1} = 3$
$v_{1,3} = 4$	$x_{3,1,1} = \varepsilon$ $w_{3,1} = 0$ $c_{3,1,1} = 4$	$x_{3,2,1} = 400$ $w_{3,2} = 0$ $c_{3,2,1} = 5$

$K = 1$

Scanned with OKEN Scanner

(142)

i \ j	$u_{1,2} = 0$	$u_{2,2} = 1$
$v_{2,1} = 2$	$x_{1,1,2} = 200$ $w_{1,1} = 0$ $c_{1,1,2} = 2$	$x_{1,2,2} = 100$ $w_{1,2} = -1$ $c_{1,2,2} = 2$
$v_{2,2} = 4$	$x_{2,1,2} = 300$ $w_{2,1} = -1$ $c_{2,1,2} = 3$	① $w_{2,2} = 0$ $c_{2,2,2} = 4$
$v_{2,3} = 2$	$x_{3,1,3} = 100$ $w_{3,1} = 0$ $c_{3,1,2} = 2$	$x_{3,2,2} = 300$ $w_{3,2} = 0$ $c_{3,2,2} = 3$

$K = 2$

(143)

i \ j	$u_{1,3} = 1$	$u_{2,3} = 0$
$v_{3,1} = 5$	① $w_{1,1} = 0$ $c_{1,1,3} = 5$	$x_{1,2,3} = 500$ $w_{1,2} = -1$ $c_{1,2,3} = 4$
$v_{3,2} = 4$	$x_{2,1,3} = 50$ $w_{2,1} = -1$ $c_{2,1,3} = 4$	⓪ $w_{2,2} = 0$ $c_{2,2,3} = 4$
$v_{3,3} = 2$	$x_{3,1,3} = 100$ $w_{3,1} = 0$ $c_{3,1,3} = 3$	$x_{3,2,3} = 100$ $w_{3,2} = 0$ $c_{3,2,3} = 2$

$K = 3$

Scanned with OKEN Scanner

i \ j	$u_{1,4} = 0$	$u_{2,4} = 0$
$v_{4,1} = 3$	-2 $w_{1,1} = 0$ $\quad c_{1,1,4} = 5$	$x_{1,2,4} = 100$ $w_{1,2} = -1$ $\quad c_{1,2,4} = 2$
$v_{4,2} = 5$	$x_{2,1,4} = 50$ $w_{2,1} = -1$ $\quad c_{2,1,4} = 4$	$x_{2,2,4} = 200$ $w_{2,2} = 0$ $\quad c_{2,2,4} = 5$
$v_{4,3} = 4$	$x_{3,1,4} = 300$ $w_{3,1} = 0$ $\quad c_{3,1,4} = 4$	$x_{3,2,4} = \varepsilon$ $w_{3,2} = 0$ $\quad c_{3,2,4} = 4$

$K = 4$

În tabelul $K = 1$ s-au luat $w_{1,1} = w_{3,1} = w_{2,2} = w_{3,2} = 0$ şi $u_{1,1} = 0$ şi s-au calculat

$$v_{1,1} = c_{1,1,1} - u_{1,1} - w_{1,1} = 2\,;\ v_{1,3} = c_{2,1,1} - u_{1,1} - w_{3,1} = 4\,;$$

$$u_{2,1} = c_{3,2,1} - v_{1,3} - w_{3,2} = 1\,;\ v_{1,2} = c_{2,2,1} - u_{2,1} - v_{1,2} = 2.$$

Ceilalţi multiplicatori nu pot fi calculaţi deocamdată din acest tabel. În tabelul $k = 2$ se iau $w_{1,1} = w_{3,1} = w_{2,2} = w_{3,2} = 0$ şi $u_{1,2} = 0$ şi se calculează

$$v_{2,1} = 2\,;\ v_{2,3} = 2\,;\ u_{2,2} = 1\,;\ v_{2,2} = 4\,;\ w_{1,2} = -1 \text{ şi } w_{2,1} = -1.$$

Revenind la tabelul $K = 1$ se înlocuiesc valorile găsite pentru $w_{1,2}$ şi $w_{2,1}$.

În tabelul $K = 3$, toate valorile variabilelor w_{ij} sînt cunoscute şi luînd $u_{2,3} = 0$ se calculează $v_{3,1} = 5\,;\ v_{3,3} = 2\,;\ u_{1,3} = 1\,;\ v_{3,2} = 4$.

De asemenea din tabelul $K = 4$ se pot calcula toate variabilele u_{jk} şi v_{ki} după ce s-au înlocuit w_{kj} prin valorile cunoscute şi s-a luat $u_{1,4} = 0$.

Pentru a stabili dacă soluţia găsită este optimă se calculează „preţurile comparative" $\bar{c}_{ijk} = u_{jk} + v_{ki} + w_{ij} - c_{ijk}$. În exemplul I avem $\bar{c}_{2,2,2} > 0$ şi $\bar{c}_{1,1,3} > 0$, deci soluţia nu este optimă şi se poate îmbunătăţi atribuind valoarea 0 uneia dintre variabilele $x_{2,2,2}$, $x_{1,1,3}$.

Fie $x_{2,2,2} = \theta$. Această schimbare implică modificarea valorilor altor variabile, în aşa fel încît restricţiile problemei să rămînă satis-

Scanned with OKEN Scanner

făcute. Transformările necesare se pot face cu mai multă ușurință pe tabelul care conține întreaga soluție, adică pe tabelul (140), „Soluția din iterația 0". Ciclurile se formează folosind variabilele din bază cu excepția lui $x_{2,2,2}$ și θ se determină prin condiția ca noua soluție să rămînă realizabilă, adică toate valorile variabilelor să fie nenegative. Avem

$$\theta = \min(300, 200, 300) = 200.$$

Astfel se ajunge la:

Soluția din iterația 1

(145)

100 $200-\theta$ θ — 300	— $100+\theta$ $500-\theta$ 100 700	100 300 500 100	
— 100 50 250 400	200 200 — — 400	200 300 50 250	
ε $200+\theta$ $100-\theta$ 100 400	400 $100-\theta$ $100+\theta$ 200 800	$400+\varepsilon$ 300 200 300	
$100+\varepsilon$ 500 150 350	600 400 600 300		

Scanned with OKEN Scanner

Reluăm aplicarea algoritmului. Pentru variabilele duale avem:

Variabilele duale pentru iterația 1

(146)

i \ j	$u_{1,1}=0$	$u_{2,1}=1$
$v_{1,1}=2$	* $w_{1,1}=0$ 2	(−2) $w_{1,2}=-1$ 4
$v_{1,2}=2$	(−3) $w_{2,1}=0$ 5	* $w_{2,2}=0$ 3
$v_{1,3}=4$	* $w_{3,1}=0$ 4	* $w_{3,2}=0$ 5

$K=1$

(147)

i \ j	$u_{1,2}=-1$	$u_{2,2}=0$
$v_{2,1}=3$	* $w_{1,1}=0$ 2	* $w_{1,2}=$ 1 2
$v_{2,2}=4$	* $w_{2,1}=0$ 3	* $w_{2,2}=0$ 4
$v_{2,3}=3$	* $w_{3,1}=0$ 2	* $w_{3,2}=0$ 3

$K=2$

(148)

i \ j	$u_{1,3}=1$	$u_{2,3}=0$
$v_{3,1}=5$	(1) $w_{1,1}=0$ 5	* $w_{1,2}=-1$ 4
$v_{3,2}=3$	* $w_{2,1}=0$ 4	(−1) $w_{2,2}=0$ 4
$v_{3,3}=2$	(0) $w_{3,1}=0$ 3	* $w_{3,2}=0$ 2

$K=3$

(149)

i \ j	$u_{1,4}=0$	$u_{2,4}=0$
$v_{4,1}=3$	(−2) $w_{1,1}=0$ 5	* $w_{1,2}=-1$ 2
$v_{4,2}=4$	* $w_{2,1}=0$ 4	(−1) $w_{2,2}=0$ 5
$v_{4,3}=4$	* $w_{3,1}=0$ 4	* $w_{3,2}=0$ 4

$K=4$

În aceste tabele nu s-au mai trecut valorile variabilelor din bază, deoarece pentru calcularea valorilor u_{jk}, v_{ki}, w_{ij} este suficient să fie cunoscută componența bazei. Aplicînd testul de optimalitate vedem că $\bar{c}_{1,1,3}=1$, deci soluția se îmbunătățește luînd $x_{1,1,3}=\theta$.

Scanned with OKEN Scanner

Din ciclul impus de această modificare și înregistrat în tabelul (145), care conține „Soluția din iterația 1", se găsește $\theta = 100$ și noua soluție.

Soluția din iterația 2

(150

100 100 100 — 300	—	200 400 100 700	100 300 500 100
—	100 50 250 400	200 200 — — 400	200 300 50 250
ε 300 — 100 400		400 — 200 200 800	400+ε 300 200 300
100+ε 500 150 350		600 400 600 300	

Recalculînd variabilele duale pentru soluția din iterația 2 și aplicînd testul de optimalitate se găsește că această soluție este optimă. În tabelele care conțin valorile variabilelor duale și prețurile comparative pentru iterația 2, toți $\bar{c}_{ijk}$ sînt negativi dar $\bar{c}_{3,2,2} = \bar{c}_{2,2,3} = 0$, deși variabilele corespunzătoare nu sînt în bază. De aici se deduce că problema admite mai multe soluții optime.

Scanned with OKEN Scanner

Variabilele duale pentru iterația 2

(151)

i \ j	$u_{1,1}=0$	$u_{2,1}=1$
$v_{1,1}=2$	* $w_{1,1}=0$ 2	(−2) $w_{1,2}=-1$ 4
$v_{1,2}=2$	(−3) $w_{2,1}=0$ 5	* $w_{2,2}=0$ 3
$v_{1,3}=4$	* $w_{3,1}=0$ 4	* $w_{3,2}=0$ 5

$K=1$

(152)

i \ j	$u_{1,2}=-1$	$u_{2,2}=0$
$v_{2,1}=3$	* $w_{1,1}=0$ 2	* $w_{1,2}=-1$ 2
$v_{2,2}=4$	* $w_{2,1}=0$ 3	* $w_{2,2}=0$ 4
$v_{2,3}=3$	* $w_{3,1}=0$ 2	(0) $w_{3,2}=0$ 3

$K=2$

(153)

i \ j	$u_{1,3}=0$	$u_{2,3}=0$
$v_{3,1}=5$	* $w_{1,1}=0$ 5	* $w_{1,2}=-1$ 4
$v_{3,2}=4$	* $w_{2,1}=0$ 4	(0) $w_{2,2}=0$ 4
$v_{3,3}=2$	(−1) $w_{3,1}=0$ 3	* $w_{3,2}=0$ 2

$K=3$

(154)

i \ j	$u_{1,4}=0$	$u_{2,4}=0$
$v_{4,1}=3$	(−2) $w_{1,1}=0$ 5	* $w_{1,2}=-1$ 2
$v_{4,2}=4$	* $w_{2,1}=0$ 4	(−1) $w_{2,2}=0$ 5
$v_{4,3}=4$	* $w_{3,1}=0$ 4	* $w_{3,2}=0$ 4

$K=4$

În exemplul I soluția inițială a fost realizabilă. Pentru a arăta cum se procedează în cazurile în care se ajunge la o soluție de bază nerealizabilă reproducem exemplul dat de E. Schell [67].

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul II. Într-o problemă multidimensională de transport, cu $m=3, n=3, p=3$, s-a găsit soluţia din tabelul 155 care este nerealizabilă din cauză că $x_{3,3,3} = -7$. Se formează un ciclu în care un

(155)

6 4 − | 10	− 5 1 | 6	− − 9 | 9	6 9 10
9 12 − | 21	4 − Φ 2 3 + Φ | 9	− + Φ − 14 − Φ | 14	13 14 17
− 1 20 | 21	4 + Φ 4 5 − Φ | 13	11 − Φ 8 − 7 + Φ | 12	15 13 18
15 17 20	4 11 9	11 8 16	

singur vîrf nu este o variabilă din bază şi paritatea acestui vîrf este aceeaşi cu a lui $x_{3,3,3}$. Din tabelul 155 se observă că Φ poate lua cel mult valoarea 4 dacă vrem să nu devină negativă o altă variabilă de bază.

Pentru $\Phi = 4$ se găseşte tot o soluţie nerealizabilă:

După o nouă iteraţie, expusă în tabelul (156), se găseşte o soluţie realizabilă de bază căreia i se poate aplica algoritmul pentru determinarea soluţiei optime.

În problemele multidimensionale de transport pot fi parametrizate constantele a_{jk}, b_{ki}, l_{ij} şi c_{ijk}. Metodele folosite pentru determinarea valorilor critice ale parametrilor şi ale soluţiilor corespunzătoare nu diferă în esenţă de cele care se folosesc în problemele bidimensionale de transport, dar aplicarea lor necesită calcule mai laborioase.

Scanned with OKEN Scanner

6 4 — 10	— 5 1 6	— — 9 9	6 9 10
9 12 — 21	— 2— Φ 7+ Φ 9	4 —+ Φ 10— Φ 14	13 14 17
— 1 20 21	8 4+ Φ 1— Φ 13	7 8— Φ —3+ Φ 12	15 13 18
15 17 20	8 11 9	11 8 16	

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

APLICAȚII ALE PROGRAMĂRII PARAMETRICE

§ 1. TRANSFORMAREA PROGRAMELOR NELINIARE ÎN PROGRAME LINIARE PRIN PARAMETRIZARE

Unele programe neliniare se pot transforma în programe liniare printr-o parametrizare convenabilă, dar este ușor de înțeles că nu există o metodă generală care să conducă la acest rezultat și că procedeul este legat de caracteristicile modelului. O exemplificare interesantă a acestui procedeu este teza de doctorat a lui H. Maurin, din care s-a publicat un extras în Revue française de recherche opérationnelle, nr. 32 din 1964, sub titlul „Paramétrisation générale d'un programme linéaire". În cele ce urmează vom reproduce aplicația practică a metodei la problema optimizării amestecurilor de carburanți.

Se propune fabricarea unui volum $V_1 = 40\,000$ m³ de supercarburant cu cifra octanică N. O. $\geqslant 94$ și a unui volum $V_2 = 100\,000$ m³ de carburant obișnuit cu N. O. $\geqslant 87$, folosind în acest scop 140 000 m³ de diferiți componenți și o substanță antidetonată, plumb tetraethilic (P.T.E.). Tehnologia de fabricare a acestor amestecuri a stabilit că dacă se adaugă unui carburant i cantitatea de 0,5‰ P.T.E., cifra octanică a carburantului crește cu S_i. Numărul S_i se numește „susceptibilitatea" carburantului i. De asemenea se știe că susceptibilitatea S_m a unui amestec este media aritmetică ponderată a susceptibilității componenților, adică

$$S_m = \frac{\Sigma V_i S_i}{\Sigma V_i}, \tag{V.1.1}$$

unde V_i este volumul componentului i. De asemenea, dacă N_i sînt cifrele octanice ale componenților unui amestec și N_m este cifra octanică a amestecului, avem

$$N_m = \frac{\Sigma V_i N_i}{\Sigma V_i}. \tag{V.1.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

În industria petrolului se admite că cifra octanică N'_m a unui amestec de carburanți care au aceiași concentrație volumetrică de P.T.E. este media aritmetică ponderată a „cifrelor octanice etilate" N'_i, deci

$$N'_m = \frac{\Sigma V_i N'_i}{\Sigma V_i}. \qquad \text{(V.1.3)}$$

Cînd se adaugă o cantitate $q^0/_{00}$ de P.T.E. unui carburant cu susceptibilitatea S_i, cifra lui octanică crește cu $G = N' - N$. Experiențele făcute în laborator au arătat că raportul dintre mărimea G și susceptibilitatea S este o funcție de q, aceeași pentru toți carburanții uzuali. Această funcție este

$$\frac{G}{S} = 2{,}85q_1 + 1{,}8q_2 + 1{,}25q_3, \qquad \text{(V.1.4)}$$

unde

q_1 este conținutul în P.T.E. cuprins între 0 și 0,2‰;

q_2 „ „ „ „ „ „ 0,2 și 0,3‰;

q_3 „ „ „ „ „ „ 0,3 și 0,5‰;

q_1, q_2 și q_3 sînt varietăți alotropice fictive de P.T.E.

Dacă se cere prepararea unui carburant cu cifra octanică $F_m = N'_m$ prin amestecul unor carburanți avînd cifrele octanice N_i și susceptibilitățile S_i, atunci

$$G_m = N'_m - N_m = F_m - N_m = F_m - \frac{\Sigma V_i N_i}{\Sigma V_i},$$

de unde

$$VF_m = \sum V_i N_i + G_m \sum V_i. \qquad \text{(V.1.5)}$$

Înlocuind în (V.1.5) valoarea lui G din (V.1.4), avem

$$VF_m = \sum V_i N_i + (2{,}85q_1 + 1{,}8q_2 + 1{,}25q_3)S_m \sum V_i$$

sau, pentru S_m dat de (V.1.1), relaţia de mai sus se scrie:

$$VF_m = \sum V_i N_i + (2{,}85q_1 + 1{,}8q_2 + 1{,}25q_3) \sum V_i S_i. \qquad \text{(V.1.6)}$$

Din acest rezultat se vede că cifra octanică a amestecului este o funcţie neliniară de volumele V_i ale componentelor şi de cantităţile q_1, q_2, q_3 de P.T.E. care se încorporează în amestec.

Modelul matematic pentru determinarea compoziţiei amestecurilor care asigură obţinerea cantităţilor cerute de supercarburant şi carburant obişnuit cu un consum minim de P.T.E. este un model neliniar. Acest model se poate transforma într-un model liniar, prin parametrizare. Ţinînd seama de cantităţile şi de caracteristicile componenţilor de care dispunem [v. tabelul (157)] şi notînd cu S_1 şi S_2 susceptibilităţile supercarburantului şi ale carburantului obişnuit, restricţiile referitoare la cifrele octanice cerute sînt

$$\Sigma x_{i_1} N_i + V_1 S_1 (2{,}85q_1 + 1{,}8q_2 + 1{,}25q_3) \geqslant 94V_1, \qquad \text{(V.1.7)}$$

$$\Sigma x_{i_2} N_i + V_2 S_2 (2{,}85q_1 + 1{,}8q_2 + 1{,}25q_3) \geqslant 87V_2, \qquad \text{(V.1.8)}$$

x_{i_1} şi x_{i_2} fiind cantităţile din componentul $i = 1, \ldots, 7$ care sînt folosite pentru obţinerea produselor cerute.

(157)

Nr. i	Componentul	Valoarea disponibilă Vi în mii tone	N.O. Ni	Si
1	Platformat 1	15	90	7
2	,, 2	10	86	8,5
3	,, 3	60	84	9
4	Reformat	10	92	4,5
5	Gazolină	6	94	5,5
6	Benzină	37	68	15
7	Butan	2	100	10
	Total	140		

Scanned with OKEN Scanner

Susceptibilităţile S_1 şi S_2 nu sînt independente, deoarece

$$S_1 = \frac{\Sigma x_{i_1} S_i}{V_1}, \qquad S_2 = \frac{\Sigma x_{i_2} S_i}{V_2},$$

deci

$$S_1 V_1 + S_2 V_2 = \Sigma S_i (x_{i_1} + x_{i_2}) = \Sigma S_i V_i,$$

de unde

$$S_1 = \frac{\Sigma S_i V_i - S_2 V_2}{V_1}. \tag{V.1.9}$$

Notînd $S_2 = p$ şi folosind datele din tabelul (157) se calculează din formula (V.1.9) S_1 în funcţie de p şi din (V.1.1) relaţia dintre p şi x_{i_1} $(i = 1, \ldots, 7)$. Avem

$$S_1 = 13{,}83 - 0{,}4p, \tag{V.1.10}$$

$$S_2 = \frac{7x_{11} + 8{,}5x_{21} + 9x_{31} + 4{,}5x_{41} + 5{,}5x_{51} + 15x_{61} + 10x_{71}}{40} = p$$

sau înmulţind ultima egalitate cu 100, obţinem

$$17{,}5x_{11} + 21{,}25x_{21} + 22{,}5x_{31} + 11{,}25x_{41} + 13{,}75x_{51} +$$

$$+ 37{,}5x_{61} + 25x_{71} = 100p \tag{V.1.11}$$

Modelul problemei propuse se compune din:

a) condiţiile de obţinere a cantităţilor de produse cerute:

$$\sum_{i=1}^{7} x_{i_1} = 40; \qquad \sum_{i=1}^{7} x_{i_2} = 100; \tag{V.1.12}$$

b) condiţiile de respectare a disponibilului pentru fiecare component:

$$x_{i_1} + x_{i_2} = V_i; \quad i = 1, \ldots, 7; \tag{V.1.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

c) condițiile privind obținerea cifrelor octanice cerute pentru fiecare produs:

$$90x_{11} + 86x_{21} + 84x_{31} + 92x_{41} + 94x_{51} + 68x_{61} + 100x_{71} + 40p(2{,}85q_1 + 1{,}8q_2 + 1{,}25q_3) \geqslant 3\,760$$

$$90x_{12} + 86x_{22} + 84x_{32} + 92x_{42} + 94x_{52} + 68x_{62} + 100x_{72} + 100(13{,}83 - 0{,}4p)(2{,}85q'_1 + 1{,}8q'_2 + 1{,}25q'_3) \geqslant 8\,700; \quad \text{(V.1.14)}$$

d) relația dintre parametrul p și variabilele x_{i_1}:

$$17{,}5x_{11} + 21{,}25x_{21} + 22{,}5x_{31} + 11{,}25x_{41} + 13{,}75x_{51} + 37{,}5x_{61} + 25x_{71} = 100p; \quad \text{(V.1.15)}$$

e) condițiile de nenegativitate a variabilelor:

$$x_{i_1},\ x_{i_2} \geqslant 0; \qquad i = 1, \ldots, 7; \quad \text{(V.1.16)}$$

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ q'_1,\ q'_2,\ q'_3 \geqslant 0.$$

Obiectivul propus fiind obținerea produselor cu un consum cît mai mic de P.T.E., se cere determinarea valorilor x_{i_1}, x_{i_2} și $q_1, q_2, q_3, q'_1, q'_2, q'_3$ care verifică restricțiile (V.1.12) — (V.1.16) și minimizează funcția

$$z = 40(q_1 + q_2 + q_3) + 100(q'_1 + q'_2 + q'_3). \quad \text{(V.1.17)}$$

Modelul problemei este liniar, matricea tehnologică A conține 12 linii și 20 coloane, iar 6 dintre vectorii-coloană conțin parametrul care mai apare și în componenta 12 a vectorului termenilor constanți d. Reamintim că studiul unei probleme de programare parametrică se începe cu determinarea soluției optime pentru o valoare particulară $p = p_0$ a parametrului și se completează cu determinarea valorilor critice ale parametrului (în intervalul în care acesta poate varia) și cu soluțiile optime corespunzătoare. În problema de care ne ocupăm, valorile critice pot apărea atît din cauza vectorului d, cît și din cauza celor 6 vectori parametrizați din matricea A; se vor combina deci metodele expuse în cap. III. § 2 și 4.

Urmează determinarea intervalului în care p poate lua valori. Acest lucru se obține prin rezolvarea a două probleme auxiliare de programare liniară. Fie p_m și p_M limitele între care poate lua valori parametrul p. Presupunînd că se adaugă $0{,}5‰$ P.T.E. atît supercarburantului cît și carburantului obișnuit, relațiile (V.1.7) și (V.1.8) devin

$$\Sigma x_{i_1} N_i + V_1 S_1 \geqslant 94V_1, \quad \text{(V.1.18)}$$

$$\Sigma x_{i_2} N_i + V_2 S_2 \geqslant 87V_2. \quad \text{(V.1.19)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în aceste relaţii pe S_m cu valoarea dată de (V.1.1), avem

$$\begin{aligned} \Sigma x_{i_1}(N_i + S_i) &\geqslant 94V_1, \\ \Sigma x_{i_2}(N_i + S_i) &\geqslant 87V_2. \end{aligned} \tag{V.1.20}$$

Relaţiile (V.1.20) formează un sistem de restricţii liniare, cărora li se ataşază condiţiile (V.1.13), condiţiile de nenegativitate a variabilelor x_{i_1}, x_{i_2} $(i = 1, \ldots, 7)$ şi pe rînd funcţiile obiectiv

$$\min u = \Sigma x_{i_1} S_i, \tag{V.1.21}$$

$$\max w = \Sigma x_{i_1} S_i. \tag{V.1.22}$$

Soluţiile optime ale acestor două probleme de programare liniară dau

$$p_m = \frac{\min u}{V_1} \quad \text{şi} \quad p_M = \frac{\max w}{V_1}.$$

Pentru exemplul studiat s-a găsit $p_m = 6{,}4875$ şi $p_M \approx 9{,}2470$. Soluţia optimă corespunde valorii $p \approx 6{,}4978$ şi este redată în tabelul (158).

(158)

Nr. i	Componentul	Volumul disponibil Vi în mii tone	Compoziţia	
			Super-carburant	Carburant obişnuit
1	Platformat 1	15	$x_{11} = 15$	$x_{12} =$ —
2	,, 2	10	$x_{21} = 8{,}725$	$x_{22} = 1{,}275$
3	,, 3	60	$x_{31} =$ —	$x_{32} = 60$
4	Reformat	10	$x_{41} = 10$	$x_{42} =$ —
5	Gazolină	6	$x_{51} = 6$	$x_{52} =$ —
6	Benzină	37	$x_{61} =$ —	$x_{62} = 37$
7	Butan	2	$x_{71} = 0{,}275$	$x_{72} = 1{,}725$
	Total	140	40	100
	Adaos de P.T.E. în cm³/l		0,2	0,3139

Consumul minim de P.T.E. este

$$0{,}2 \times 40 + 0{,}3139 \times 100 = 39{,}39 \text{ m}^2$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. APLICAȚII ALE PROGRAMARII LINIARE PARAMETRICE ÎN PROBLEME DE INVESTIȚII

Problemele de investiții cu importante și adînci implicații în viața economică constituie o amplă preocupare în cercetarea operațională. S-au stabilit o serie de metode de abordare și tratare a acestor teme. În cele ce urmează nu intenționăm să dăm nici aspectul general al problemelor de investiții, nici metodele lor specifice, ci să expunem studiul făcut asupra unei probleme de investiții prin metoda programării liniare parametrice, pentru a pune în evidență acest larg domeniu de aplicații ale metodei.

Problema care urmează să fie expusă a fost studiată de P. Mainié [52] de la Institutul național agricol din Paris și constă în alegerea unei combinații de livezi pentru o exploatare pomicolă din valea Garonne, care să asigure un beneficiu maxim în condițiile tehnice specifice regiunii. Întreprinderea dispune de o suprafață s, de P muncitori cu angajament permanent și își poate asigura un număr de S muncitori sezonieri pentru perioadele de recoltare a fructelor. Solurile regiunii convin în întregime merilor și perilor și numai în parte piersicilor.

Se definesc tipurile de livezi care diferă între ele prin specie, varietate, forma arborilor, desimea plantației etc. și pentru fiecare tip de livadă se determină nivelul optim de utilizare. În urma acestui studiu s-au determinat: pentru piersici 21 tipuri de livezi, pentru meri 18 și pentru peri 11. Din motive tehnice se hotărăște ca plantarea întregii suprafețe cu pomi să se execute în decurs de 5 ani, plantînd în fiecare an 1/5 din suprafața disponibilă. În acest fel numărul „activităților" întreprinderii se mărește, deoarece, atît consumul de factori de producție, cît și beneficiile aduse de o livadă depind de vîrsta livezii. În cazul exploatării pomicole studiate sînt luate în considerare 250 de activități, rezultate din:

21 tipuri de livezi × 5 vîrste = 105 activități pentru piersici;

18 „ „ „ × 5 „ = 90 „ „ meri;

11 „ „ „ × 5 „ = 55 „ „ peri.

Nivelul la care se desfășoară activitățile se notează cu

$$x_{it}\,(i = 1, \ldots, 21),\quad x_{jt}\,(j = 22, \ldots, 39),\quad x_{kt}\,(k = 40, \ldots, 50);\quad t(1, \ldots, 5)$$

Scanned with OKEN Scanner

Restricţiile problemei se referă la:

1° *Folosirea pămîntului*. Deoarece s-a hotărît ca întregul sistem de plantaţie să se execute în decurs de 5 ani, plantînd anual 1/5 din suprafaţă, avem cinci restricţii de forma

$$\sum_i x_{it} + \sum_j x_{jt} + \sum_k x_{kt} \leqslant 1/5s \qquad \text{pentru } t = 1, \ldots, 5. \qquad \text{(V.2.1)}$$

În aceeaşi categorie de condiţii apare şi o limitare referitoare la suprafaţa maximă care poate fi folosită pentru livezile de piersici, condiţie rezultată din considerente tehnice, care dă loc inecuaţiei

$$\sum_{kt} x_{kt} \leqslant 30\text{ha} \qquad \text{(V.2.2)}$$

2° *Forţa de muncă*. Prin folosirea forţei de muncă de care dispune exploatarea pomicolă trebuie să se asigure posibilitatea de a executa anumite munci într-un interval determinat. În cazul de care ne ocupăm se deosebesc următoarele perioade după munca cerută:

— decembrie-martie = 64 zile = 640 ore pentru tăiatul pomilor;

— mai = 25 zile = 250 ore pentru rărirea fructelor;

— iunie-octombrie pentru recoltare.

În primele două perioade munca trebuie asigurată de salariaţii permanenţi ai întreprinderii, deci se impun limitările

$$\sum_{it} a_{it}\, x_{it} + \sum_{jt} a_{jt}\, x_{jt} + \sum_{kt} a_{kt}\, x_{kt} \leqslant 640 \times P; \qquad \text{(V.2.3)}$$

$$\sum_{it} b_{it}\, x_{it} + \sum_{jt} b_{jt}\, x_{jt} + \sum_{kt} b_{kt}\, x_{kt} \leqslant 250 \times P, \qquad \text{(V.2.4)}$$

în care a_{it}, a_{jt}, a_{kt} reprezintă consumul unitar de muncă pentru tăiatul pomilor i, j şi k de vîrsta t şi b_{it}, b_{jt}, b_{kt} reprezintă consumul unitar de muncă pentru rărirea fructelor i, j, k la pomii de vîrsta t.

Pentru recoltarea fructelor se pot folosi şi muncitori sezonieri. Intervalul de recoltare se împarte în trei subintervale omogene din punctul de vedere al muncii cerute: în primul şi în ultimul interval se recoltează un singur fel de fructe, în timp ce în cel din mijloc este necesară recoltarea a două varietăţi sau specii diferite. Notînd cu l

Scanned with OKEN Scanner

durata unei perioade omogene din punctul de vedere al muncii, restricţiile care asigură posibilitatea îndeplinirii sarcinilor sînt

$$\sum_{it} c_{it}\, x_{it} + \sum_{it} c_{i+1,\,t}\, x_{i+1,\,t} + \ldots \leqslant l(P + S), \qquad \text{(V.2.5)}$$

unde x_{it} şi $x_{i+1,\,t}$ sînt varietăţi cu perioade de recoltare succesive, dar care se suprapun pe intervalul din mijloc. În cazul analizat s-au numărat 24 perioade omogene de recoltare care au condus la 24 inecuaţii de tipul (V.2.5).

3° *Folosirea tractoarelor.* Un tractor poate presta anual 800 ore de muncă. Dacă d_{it}, d_{jt}, d_{kt} reprezintă consumul unitar în ore-tractor pentru arborii i, j, k de vîrstă t, avem

$$\sum_{it} d_{it}\, x_{it} + \sum_{jt} d_{jt}\, x_{jt} + \sum_{kt} d_{kt}\, x_{kt} \leqslant 800 \times n, \qquad \text{(V.2.6)}$$

unde n reprezintă numărul de tractoare de care dispune întreprinderea.

4° *Folosirea atomisorilor.* Atomisorii sînt folosiţi pentru combaterea dăunătorilor. Practica arată că este puţin probabil să fie necesară tratarea a două specii diferite în aceeaşi zi. Tehnica combaterii dăunătorilor cere ca tratamentul să fie făcut, pentru toate varietăţile aceleiaşi specii timp de 10 ore, repartizate cel mult în decursul a două zile, începînd de la semnalarea necesităţii unei acţiuni phitosanitare. Din aceste considerente rezultă că restricţiile legate de capacitatea de muncă a atomisorilor sînt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{it} e_{it}\, x_{it} \leqslant 10 \times \text{ numărul atomisorilor existenţi;}\\
&\sum_{jt} e_{jt}\, x_{jt} \leqslant 10 \times \text{ numărul atomisorilor existenţi;} \qquad \text{(V.2.7)}\\
&\sum_{kt} e_{kt}\, x_{kt} \leqslant 10 \times \text{ numărul atomisorilor existenţi,}
\end{aligned}$$

e_{it}, e_{jt}, e_{kt} fiind numărul de ore-atomisor solicitate de o unitate de suprafaţă plantată cu piersici, meri, şi peri de vîrsta t.

5° *Disponibilul de fonduri băneşti.* Întreprinderea îşi poate propune să aleagă acel tip de livezi care nu necesită investiţii de fonduri băneşti superioare unei sume de care dispune. Desigur, acest mod de a aborda problema poate constitui un punct de vedere pe care însă autorul studiului prezentat nu-l consideră cel mai bun.

Scanned with OKEN Scanner

O altă posibilitate este aceea de a determina suma de bani care pentru o dobîndă unitară I aduce un beneficiu actualizat $B(I)$ pozitiv. Dacă întreprinderea nu dispune de această sumă se va împrumuta suma necesară cu o dobîndă unitară $I' > I$. Un element de care se ţine seama în deciziile de investiţii este „raportul de rentabilitate" r, definit sub forma cîtului dintre venitul R şi suma de bani C investită pentru îndeplinirea proiectului. Raportul de rentabilitate este egal cu dobînda unitară K pentru care beneficiul actualizat este nul, adică $B(K) = 0$. Pe de altă parte raportul de rentabilitate se bucură de următoarea proprietate remarcabilă: dacă se clasifică un grup de sisteme de producţie folosind diferite dobînzi unitare I, clasificarea acestui grup în funcţie de raportul de rentabilitate este invariantă. În baza acestei proprietăţi, suma C care trebuie investită se determină astfel:

— se atribuie dobînzii unitare I valori cuprinse într-un interval determinat (în lucrarea expusă se iau numai valorile $I = 4\%$, 8% şi 12%);

— se determină pentru fiecare caz scadenţarul corespunzător beneficiului maxim;

— se calculează *a posteriori* suma care trebuie investită pentru fiecare soluţie*.

6°. *Obiectul modelului.* Reamintim că scopul studiului este alegerea unei combinaţii de livezi care să asigure întreprinderii un beneficiu maxim. Beneficiul se creează prin contribuţia fiecărei activităţi, din care urmează să se scadă cheltuielile fixe. Contribuţia A_i a unei activităţi este egală cu diferenţa dintre valoarea producţiei şi cheltuielile directe. La rîndul ei, valoarea producţiei se calculează înmulţind volumul producţiei, în tone pe hectar, cu preţul de vînzare. Autorul acceptă ipoteza — evident menită să simplifice lucrurile — că producţia este invariabilă de la an la an. Preţurile fructelor nu pot fi decît estimate, dat fiind că aprecierea lor se face în momentul întocmirii proiectului, moment care anticipează vînzările cu numărul de ani necesari intrării livezilor în producţie. Cheltuielile directe sînt dependente de vîrsta fiecărei activităţi şi se calculează prin diferite analize contabile. Toate sumele de bani investite sau realizate în diferite momente trebuie actualizate pentru a putea fi însumate. În cazul de faţă se consideră că soluţia optimă este acea care maximizează beneficiul actualizat total, obţinut în timpul unei perioade de 10 ani. Actualizarea se poate face fie pentru momentul iniţial, fie pentru

* La subpunctele 5° şi 6° s-au reprodus considerentele autorului studiului [52] pentru determinarea sumei de bani C şi a funcţiei economice. Noi nu ne ocupăm de valabilitatea acestora în condiţiile economiei socialiste, ci urmărim să scoatem în evidenţă posibilităţile de studiu pe care le oferă parametrizarea în problemele de investiţii.

Scanned with OKEN Scanner

momentul final, fie pentru un moment convenabil ales în cadrul acestui interval, cu o dobîndă unitară I. Astfel se stabileşte că:

beneficiul = contribuţia totală actualizată — cheltuielile fixe;

contribuţia totală actualizată $= \sum_{it} \frac{A_i}{(1+I)^t}$.

Problema a fost rezolvată pentru o suprafaţă de 50 ha, 15 muncitori permanenţi, 5 sezonieri, 4 tractoare, 3 atomisori, $I = 8\%$ şi ţinînd seama de preţurile maxime de vînzare ale fructelor. Soluţia optimă este:

(159)

Activitatea	Suprafaţa plantată în anul				
	1	2	3	4	5
	în ha				
Piersici		3,40	6,50	10	10
Meri	3,40		3,50		
Peri	6,60	6,60			
Total ha	10	10	10	10	10

Condiţiile în care s-a găsit soluţia optimă nu iau în considerare faptul că:

a) preţurile sînt aleatoare sau mai corect spus incerte;

b) contribuţia unei activităţi se modifică în funcţie de folosirea factorilor ficşi de producţie.

Prima problemă se poate rezolva prin parametrizarea coeficienţilor funcţiei obiectiv, iar a doua prin parametrizarea unora din componentele vectorului d din sistemul restricţiilor.

Se iau în discuţie fiecare dintre aceste teme.

Variaţia preţurilor. Preţurile de vînzare ale fructelor nu pot fi privite ca variabile aleatoare cu distribuţii cunoscute. Analiza preţurilor pe o perioadă trecută furnizează următoarele informaţii:

— preţurile de vînzare a varietăţilor aceleiaşi specii nu sînt independente;

— există o corelaţie între preţurile diferitelor specii de fructe care se consumă în aceeaşi perioadă;

— există două perioade distincte în cursul unui an: vara şi începutul toamnei constituie prima perioadă, sfîrşitul toamnei şi iarna,

Scanned with OKEN Scanner

a doua. Preţurile în perioada a doua sînt puternic influenţate de preţurile cu care apar pe piaţă fructele din import.

Aceste considerente arată că se pot studia modificările soluţiei optime în funcţie de variaţia preţurilor folosind numai doi parametri independenţi λ_1 şi λ_2. Notînd cu:

p_i şi P_i preţul minim şi maxim al fructelor din varietatea i vîndute în prima perioadă;

p_j şi P_j preţul minim şi maxim al fructelor din varietatea j vîndute în perioada a doua;

R_i şi R_j randamentul la hectar al varietăţilor i şi j;

x_i şi x_j suprafeţele pe care se recoltează;

C_i şi C_j cheltuielile variabile unitare de exploatare a livezilor; contribuţia totală a activităţilor este dată de funcţia:

$$Z = \sum_i x_i\{R_i[\lambda_1 p_i + (1-\lambda_1)P_i] - C_i\} + \\ + \sum_j x_j\{R_j[\lambda_2 p_j + (1-\lambda_2)P_j] - C_j\}.$$

Studiul se poate face considerînd că preţurile fructelor în perioada de iarnă rămîn la nivelul maxim ($\lambda_2 = 0$) şi a celor din perioada de vară scad ($0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1$) sau în situaţia inversă ($\lambda_1 = 0$, $0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 1$), după cum se poate studia şi ipoteza modificării preţurilor în ambele perioade. Lucrarea la care ne referim transmite soluţiile optime numai în cazurile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ şi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, soluţii reproduse în tabelul următor:

(160)

Nivelul Preţurilor	Activitatea	Suprafaţa plantată în anul				
		1	2	3	4	5
		în ha				
$\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 1$ Contribuţia 403260 F	Piersici	10	10	6,50	3,30	
	Meri			3,50		3,40
	Peri				6,70	6,60
$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0$ Contribuţia 139130 F	Piersici	10	9,20	4,70	6	
	Meri			1,70		8,70
	Peri		0,80	3,60	4	1,30

Scanned with OKEN Scanner

Determinarea valorilor critice ale parametrilor și ale soluțiilor optime corespunzătoare subintervalelor separate de aceste valori nu comportă dificultăți de calcul. Din punctul de vedere al interpretării geometrice problema constă în determinarea vîrfului optim a polihedronului soluțiilor, cînd se modifică „panta" hiperplanului care reprezintă funcția obiectiv.

Variațiile factorilor de producție. Se pune întrebarea dacă nu există soluții optime mai puțin costisitoare care, la un nivel dat al prețurilor, să asigure un beneficiu destul de apropiat de cel găsit în condițiile inițiale. Dacă există astfel de soluții ele sînt mai puțin riscante, deoarece investițiile în mijloace de producție fixe sînt mai mici. Din punct de vedere economic este interesant numai studiul variației acelor factori care intră cu o cotă importantă în costul producției. Studiul propus se poate face parametrizînd simultan sau succesiv coeficienții care exprimă limitarea factorilor de producție. În lucrarea de care ne ocupăm s-a parametrizat numărul muncitorilor permanenți, lăsînd nemodificat numărul celor sezonieri și s-a constatat că atunci cînd numărul muncitorilor permanenți descrește de la 15 la 13 suprafețele finale ale plantațiilor suferă ușoare modificări, dar se schimbă calendarul de plantație.

În situația în care numărul muncitorilor permanenți este considerat constant dar variază numărul celor sezonieri se constată că reducînd acest număr la jumătate se modifică repartizarea speciilor de pomi. Dacă reducerea se face la mai puțin de jumătate din numărul inițial apar în soluție suprafețe care nu mai sînt plantate.

Din punct de vedere geometric, în toate modelele în care parametrii afectează componentele vectorului d, unele din hiperplanele care limitează polihedronul soluțiilor realizabile se deplasează păstrînd aceeași „pantă".

Concluziile care se desprind din analiza acestei probleme sînt următoarele:

1° Metoda parametrizării este foarte indicată în analizarea deciziilor care se pot lua în problemele de investiții, deoarece parte din coeficienții modelului nu sînt constanți și nici nu pot fi considerați ca mărimi aleatoare. Abordarea cea mai corectă constă în a ține seama de incertitudinile reflectate de acești coeficienți, analizînd influența variației lor asupra soluției optime.

2° Variația parametrilor are sens economic determinat și prin aceasta înlesnește iuterpretarea relațiilor care se stabilesc între soluția optimă și diferitele valori pe care le iau datele problemei.

Scanned with OKEN Scanner

3° Ipotezele care se fac prin variaţia parametrilor înlocuiesc „experienţele" care încercate în practică ar fi foarte costisitoare şi riscante.

§ 3. APLICAŢII ALE PROGRAMĂRII LINIARE PARAMETRICE ÎN ALEGEREA RAŢIILOR FURAJERE

În cele mai frecvente cazuri întîlnite în practică, raţiile furajere pot fi stabilite combinînd o serie de nutreţuri, astfel încît costul alimentaţiei să fie minim. Restricţiile de bază care formează modelele matematice ale acestor probleme sînt acelea care asigură respectarea legilor unei alimentaţii raţionale pentru specia şi rasa animalelor luate în studiu. Aceste restricţii impun respectarea necesarului de calorii, proteine, substanţă uscată etc. pentru fiecare categorie de animale. Desigur că un model corect construit va ţine seama şi de particularităţile relative la toleranţa animalelor pentru anumite furaje, de limitările relative la posibilităţile de procurare a furajelor etc.

O întreprindere care s-ar ocupa numai de o singură specie de animale este obligată totuşi să le diferenţieze în categorii după anumite criterii. Desigur că pentru fiecare din aceste categorii distincte se cere o alimentaţie adecvată scopului urmărit. De aceeaş s-ar părea că este necesar să se construiască şi să se rezolve un număr mare de modele de furajare care să ţină seama de caracteristicile alimentaţiei fiecărei categorii. Această muncă cere mult timp dacă modelele sînt rezolvate prin calcul manual sau ocupă o parte importantă din capacitatea de lucru a maşinilor electronice de calcul. În ambele cazuri prezintă interes reducerea numărului modelelor la strictul necesar şi aceasta se poate obţine folosind programarea parametrică.

Pentru a concretiza problema să presupunem că se cere determinarea raţiei furajere pentru vacile de lapte. O alimentaţie raţională trebuie să asigure necesarul de unităţi nutritive, proteină digestibilă, substanţă uscată, calciu, fosfor şi caroten. În cursul unui an se deosebesc două perioade în care necesarul din fiecare principiu nutritiv menţionat este diferit, şi anume perioada de stabulaţie şi cea de păşune. Pe de altă parte, necesarul depinde, în fiecare perioadă, de greutatea animalului, de cantitatea de lapte pe care o dă şi de procentul de grăsimi din lapte. Între două naşteri cantitatea zilnică de lapte pe care o dă o vacă variază între 5 şi 30 de litri. Normele de hrană zilnică sînt prezentate în tabelul (161). Din acest tabel, care se

Scanned with OKEN Scanner

Norme de hrană zilnică pentru vaci de 400 kg
Procentul de grăsimi în lapte 3,5%

(161)

Producția de lapte, în l/zi	Unități nutriție, în U.N.	Proteină digestibilă, în g	Substanță uscată, în kg	Calciu, în g	Fosfor, în g	Caroten, în g.
5	6,3	570	8,0	40	27	245
7,5	7,4	712	8,8	50	35	307
10	8,6	855	9,6	60	43	370
12,5	9,7	997	10,4	70	51	432
15	10,9	1140	11,2	80	59	495
17,5	12	1282	12,0	90	67	597
20	13	1425	12,8	100	75	620
22,5	14,3	1567	13,6	110	83	682
25	15,5	1710	14,4	120	91	745
27,5	16,6	1852	15,2	130	99	807
30	17,8	1995	16	140	107	870

referă numai la vaci în greutate de 400 kg și care dau lapte cu un procent de grăsime de 3,5%, rezultă că normele de hrană sînt diferențiate pe 11 categorii. Dacă se mai ține seama și de greutatea animalelor și de procentul de grăsime din lapte, numărul modelelor necesare pentru determinarea rațiilor furajere optime într-o singură fermă devine impresionant de mare. Aceste rații nu pot fi aceleași nici pentru toate fermele care au vaci de lapte, fiindcă nutreturile de care dispun fermele diferă după amplasarea lor. Astfel vedem cum sporește numărul modelelor și de aceea se pune cu stringență problema reducerii acestui număr la strictul necesar. Ne propunem să alcătuim un singur model pentru cele 11 categorii ale căror norme de hrană sînt conținute în tabelul (161). Perioada aleasă este cea de stabulație. Admitem că ferma de care ne ocupăm dispune de nutreturile cuprinse în tabelul (162). Pe lîngă condițiile care se referă la asigurarea necesarului de substanțe prevăzute în norme, modelul cu ajutorul căruia se determină rația furajeră optimă mai cuprinde și limitări referitoare la

Scanned with OKEN Scanner

cantități de nutreţuri asimilabile sau disponibile. Notînd cu x_i cantitatea, în kilograme, din nutreţurile $i = 1, \ldots, 15$ cuprinse în tabelul (162) şi cu a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, h_i, conţinutul în unităţi nutritive, proteină digestibilă, substanţă uscată, calciu, fosfor şi caroten cuprinse în nutreţurile disponibile, următoarele restricţii asigură:

(162)

	Nutreţul	Nr	Conţinutul în						
			U.N.	Proteine, în g	Subst. uscată în g	Calciu, în g	Fosfor, în g	Caroten, în g	Preţul, lei
Fibroase	Fîn de şes	1	0,39	48	858	4	1,6	13	0,35
	Lucernă	2	0,41	96	850	10	1,6	10	0,40
	Trifoi	3	0,59	92	830	9,80	2,8	25	0,40
	Borceag	4	0,39	66	870	6,20	1,9	19	0,38
Grosiere	Paie grîu	5	0,35	3	870	2,60	0,8	0,1	0,10
	Coceni	6	0,38	18	840	4,60	1,8	—	0,12
Insilozate şi suculente	Porumb	7	0,22	11	255	1,20	0,5	18	0,10
	Sfeclă	8	0,12	9	125	0,35	0,3	—	0,30
	Dovleci	9	0,11	9	90	0,40	0,3	15	0,10
	Morcov furajer	10	0,15	12	130	0,60	0,4	60	
Concentrate	Porumb dublu hibrid	11	1,22	62	813	0,50	2,5	1	1,20
	Orez	12	1,10	91	849	1,30	3,8	0,2	1,15
	Mazăre	13	1,09	198	842	2,90	4,7	0,2	1,70
	Tărîţe grîu	14	0,76	121	863	1,97	13,8	0,1	1,10
	Şroturi floarea soarelui	15	0,89	324	889	2,80	11,5	—	1,50

— necesarul de unităţi nutritive:

$$\sum_{i=1}^{15} a_i x_i \geqslant 6{,}3 + \lambda_1; \qquad 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 11{,}5; \qquad \text{(V.3.1)}$$

— necesarul de proteină digestibilă:

$$\sum_{i=1}^{15} b_i x_i \geqslant 570 + \lambda_2; \qquad 0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 1425; \tag{V.3.2}$$

— necesarul de substanţă uscată:

$$\sum_{i=1}^{15} c_i x_i \geqslant 8 + \lambda_3; \qquad 0 \leqslant \lambda_3 \leqslant 8; \tag{V.3.3}$$

— necesarul de calciu:

$$\sum_{i=1}^{15} d_i x_i \geqslant 40 + \lambda_4; \qquad 0 \leqslant \lambda_4 \leqslant 100; \tag{V.3.4}$$

— necesarul de fosfor:

$$\sum_{i=1}^{15} e_i x_i \geqslant 27 + \lambda_5; \qquad 0 \leqslant \lambda_5 \leqslant 80; \tag{V.3.5}$$

— necesarul de caroten:

$$\sum_{i=1}^{15} h_i x_i \geqslant 245 + \lambda_6; \qquad 0 \leqslant \lambda_6 \leqslant 635; \tag{V.3.6}$$

— cantitatea de nutreţuri fibroase şi grosiere nu trebuie să depăşească 7 kg, deci

$$\sum_{i=1}^{6} x_i \leqslant 7; \tag{V.3.7}$$

— cantitatea de nutreţuri însilozate şi suculente trebuie să fie de cel puţin 20 kg, prin urmare:

$$\sum_{i=7}^{10} x_i \geqslant 20; \tag{V.3.8}$$

— disponibilul de şroturi de floarea soarelui şi tărîţe fiind limitat, cantitatea care poate intra în raţia zilnică pe cap de vacă furajată nu poate depăşi 500 g, prin urmare

$$x_{14} + x_{15} \leqslant 0{,}5. \tag{V.3.9}$$

Obiectivul modelului este determinarea raţiei furajere care asigură respectarea normelor prevăzute la un preţ de cost minim. În

Scanned with OKEN Scanner

consecință, soluția optimă este un vector cu componentele nenegative x_i; $i = 1, \ldots, 15$, care satisface inecuațiile (V.3.1) — (V.3.9) și minimizează funcția

$$f = \sum_{i=1}^{15} p_i x_i, \tag{V.3.10}$$

în care p_i reprezintă prețul unui kilogram de furaj $i = 1, \ldots, 15$.

Modelul la care s-a ajuns constituie o problemă de programare liniară în care șase dintre termenii liberi ai sistemului de restricții depind liniar de cîte un parametru. Teoretic problema nu prezintă dificultăți, totuși determinarea valorilor critice ale parametrilor cere rezolvarea unor sisteme de inecuații liniare de forma

$$f_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6) \geqslant 0\,;\ i = 1, \ldots, 10, \tag{V.3.11}$$

$$0 \leqslant \lambda_j \leqslant m_j\,;\quad j = 1, \ldots, 6, \tag{V.3.12}$$

în care f_i sînt funcții liniare de parametrii λ_j; $j = 1, \ldots, 6$ și exprimă condițiile de nenegativitate a componentelor unei soluții optime, iar m_j sînt limitările variației parametrilor. Această problemă poate fi formulată folosind un singur parametru. În adevăr, studiind tabelul (161) se constată că sporul de $^1/_2$ kg la producția de lapte necesită mărirea conținutului rației furajere zilnice cu 0,23 unități nutritive, 28,5 g proteină digestibilă, 0,16 kg substanță uscată, 2 g calciu, 1,6 g fosfor și 12,5 g caroten. Folosind un singur parametru, notat cu λ, modelul problemei se scrie:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{15} a_i x_i \geqslant 6{,}3 + 0{,}23\lambda,\\
&\sum_{i=1}^{15} b_i x_i \geqslant 570 + 28{,}5\lambda,\\
&\sum_{i=1}^{15} c_i x_i \geqslant 8 + 0{,}16\lambda,\\
&\sum_{i=1}^{15} d_i x_i \geqslant 40 + 2\lambda,\\
&\sum_{i=1}^{15} e_i x_i \geqslant 27 + 1{,}6\lambda,
\end{aligned} \tag{V.3.13}$$

$$\sum_{i=1}^{15} h_i x_i \geqslant 245 + 12{,}5\lambda,$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i \leqslant 7,$$

$$\sum_{i=7}^{10} x_i \geqslant 20,$$

$$x_{14} + x_{15} \leqslant 0{,}5,$$

$$x_i \geqslant 0\,;\ i = 1, \ldots, 15\,;$$

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 50$$

$$\min f = \sum_{i=1}^{15} p_i x_i. \qquad \text{(V.3.14)}$$

Rezolvînd problema pentru $\lambda = 0$ se determină raţia optimă pentru vacile cu producţie de 5 litri lapte pe zi. Fie B^{-1} inversa bazei optime. Produsul $B^{-1}D$, unde D este vectorul coloană;

$$D[6{,}3 + 0{,}23\lambda\,;\ 570 + 28{,}5\lambda\,;\ 8 + 0{,}16\lambda\,;\ 40 + 2\lambda\,;$$

$$27 + 0{,}16\lambda\,;\ 245 + 12{,}5\lambda\,;\ 7\,;\ 20\,;\ 0{,}5],$$

ne dă componentele soluţiei asociate bazei B, pentru $\lambda \neq 0$. Această soluţie este optimă pentru valorile parametrului λ pentru care toate componentele vectorului $\overline{D} = B^{-1}D$ sînt nenegative. Componentele $\overline{D}_s$ ale vectorului $\overline{D}$ sînt funcţii liniare de λ, deci rezolvarea sistemului de inecuaţii $D_s \geqslant 0$; $s = \{i_1, i_2, \ldots, i_s\} \subset \{1, 2, \ldots, 15\}$ nu comportă dificultăţi şi conduce la determinarea primei valori critice λ_1 a parametrului λ. Dacă $\lambda_1 < 50$ se caută o soluţie optimă pentru $\lambda > \lambda_1$ prin metoda expusă în cap. III, § 2 (vectorul d funcţie liniară de un parametru).

§ 4. OPTIMIZAREA COSTULUI UNUI PROIECT, FUNCŢIE DE DURATA PROIECTULUI

În 1958 s-a elaborat o nouă metodă de planificare, coordonare şi control pentru execuţia proiectelor cu un număr mare de activităţi. Această metodă, cunoscută sub numele de „metoda drumului critic",

înlătură deficiențele diagramei Gantt folosită încă și azi în planificarea execuției lucrărilor de construcție-montaj. Metoda drumului critic prezintă diferite variante, denumite C.P.M., P.E.R.T, metoda potențialelor etc.; Baza matematică a tuturor variantelor este teoria grafelor. Succesul înregistrat de metoda drumului critic atît în aplicarea ei, cît și în preocupările științifice pe care le-a creat și care au condus la unele perfecționări se explică prin aceea că răspunde nevoii de orientare în probleme complexe în care intuiția și experiența devin insuficiente, iar aplicarea ei nu cere cunoștințe matematice prea subtile. În esență, metoda drumului critic constă în reprezentarea unui proiect printr-un graf, cu ajutorul căruia se determină termenul final de îndeplinire a proiectului, termenele intermediare la care trebuie îndeplinite diferitele activități care compun proiectul, intervalele de timp în care pot fi decalate unele activități fără a stînjeni respectarea termenului final și drumul critic. Pentru aplicarea metodei drumului critic este necesară o analiză amănunțită a proiectului, prin care se stabilesc activitățile ce trebuie îndeplinite, succesiunea lor, tehnologia folosită pentru execuția activităților și durata fiecărei activități. Dacă unele din problemele care trebuie rezolvate înainte de construirea grafului au răspunsuri ferme, există și unele probleme care pot fi rezolvate în mai multe feluri. De exemplu, activitățile necesare îndeplinirii unui proiect pot fi precis cunoscute, deși noțiunea de „activitate" poate fi mai cuprinzătoare sau mai îngustă, în funcție de scopul planificării. Cînd se urmărește numai fixarea datelor la care trebuie îndeplinite părți mari ale proiectului (organizarea șantierului, executarea construcției pînă la cota 0, structura de rezistență, lucrări de finisaj etc.), noțiunea de activitate este atribuită acestor părți. Atunci cînd proiectul urmărește conducerea operativă a lucrărilor este necesar să se considere activitate fiecare operație care trebuie executată. De exemplu, pentru betonarea fundațiilor activitățile sînt: săparea fundațiilor, cofrarea, armarea, betonarea, întărirea, decofrarea etc. Totuși, o dată fixat scopul planificării, noțiunea de activitate poate fi precis delimitată. Nu se poate spune același lucru în legătură cu succesiunea activităților. În desfășurarea activităților există, evident, unele condiționări „absolute", dar apar și condiționări „relative"*. Dacă o activitate nu poate fi începută înainte de terminarea alteia, condiționarea este absolută. De exemplu, „betonarea" nu se poate începe pînă cînd nu s-a terminat „armarea". Condiționările relative pot fi de natură diferită: normative, tehnologice și organizatorice. Condiționările normative pot fi elimi-

* Metoda drumului critic, Sfatul popular al Capitalei, Direcția generală construcții-montaj, București, 1965, Pentru uz intern.

Scanned with OKEN Scanner

nate prin derogări ; nerespectarea celor tehnologice impune de obicei cheltuieli suplimentare, care în anumite condiţii pot fi acceptate. Condiţionările organizatorice sînt cele care rezultă din necesitatea asigurării spaţiilor de lucru, circulaţie, depozitare şi disponibilului de resurse. Aceste condiţionări pot fi acceptate sau înlăturate. De exemplu, pe un front de lucru, două activităţi care nu se condiţionează nu pot fi executate simultan fără ca echipele şi utilajele să-şi stînjenească reciproc munca. Această situaţie poate conduce fie la acceptarea unei condiţionări, fie la acceptarea unui randament scăzut al muncii echipelor şi utilajelor, dacă aceasta contribuie la obţinerea altor avantaje. Din cele arătate rezultă că eşalonarea lucrărilor poate prezenta mai multe variante.

Alegerea tehnologiei care urmează să se folosească pentru îndeplinirea activităţilor este determinată de condiţii care nu vor fi luate în discuţie aici. Această alegere influenţează durata activităţilor, fără a o determina cu precizie. Faptul că în lucrările de construcţii-montaj experienţele se repetă arareori în condiţii identice şi că aceste lucrări sînt în parte condiţionate de factori meteorologici fac ca timpul necesar executării activităţiilor să nu poată fi calculat cu precizie, ci apreciat. În general se face o apreciere „pesimistă", una „optimistă" şi aprecierea duratei celei mai probabile a fiecărei activităţi. În situaţia în care se acceptă „durata cea mai probabilă" ca durată a activităţii, metoda drumului critic se prezintă sub aspectul deterministic. Dacă se ţine seama de faptul că această durată este aleatoare pot exista două ipoteze: a) se cunoaşte cel puţin cu aproximaţie legea de probabilitate a duratei ficărei operaţii, sau b) aceată lege este necunoscută. În prima ipoteză, duratele t_{ij} ale activităţilor (ij) sînt variabile aleatoare cu valori medii t_{ij} şi abateri standard cunoscute şi metoda drumului critic ia un aspect probabilistic. În ipoteza a doua ne găsim într-un caz de incertitudine greu de mînuit. Metoda P.E.R.T., pentru aceste cazuri, acceptă ipoteza că duratele t_{ij} sînt distribuite după o lege β astfel aleasă încît :

$$E(t_{ij}) = \overline{t}_{ij} = \frac{1}{6}\left[t_{ij}^{(o)} + 4t_{ij}^{(m)} + t_{ij}^{(p)}\right], \qquad \text{(V.4.1)}$$

$$\sigma_{t_{ij}} = \frac{1}{6}\left(t_{ij}^{(p)} - t_{ij}^{(o)}\right), \qquad \text{(V.4.2)}$$

unde s-a notat cu :

$t_{ij}^{(o)}$ durata „optimistă" a activităţii ij ;

$t_{ij}^{(p)}$ durata „pesimistă" a activităţii ij ;

$t_{ij}^{(m)}$ durata „cea mai probabilă" a acestei activităţi.

Scanned with OKEN Scanner

Acceptarea distribuției β ca lege după care sînt distribuite duratele activităților nu poate fi riguros justificată, dar asigură o simplificare importantă a calculelor. Kenneth R. Mac Crimmon și Charles A. Rayrec în articolul „An analytical study of the PERT assumptions", publicat în Operations Research, vol. 13, nr. 1, din ianuarie-februarie 1964, analizează erorile care apar în calcule din cauza ipotezelor P.E.R.T. Autorii consideră trei surse principale de erori în calculul mediei și abaterii standard a fiecărei activități și discută sursele posibile de erori în calculul mediei și abaterii standard a proiectului. Dacă cele din urmă sînt strîns legate de configurația grafului asociat proiectului, primele sînt determinate de:

— înlocuirea distribuției reale, dar necunoscute, a variabilei aleatoare prin distribuția β;

— particularizarea distribuției β astfel încît t_{ij} și σ_{ij} să ia valorile date de formulele (V.4.1) și (V.4.2);

— estimarea inexactă a valorilor $t_{ij}^{(o)}$, $t_{ij}^{(p)}$ și $t_{ij}^{(m)}$ folosite în calculul mediei și abaterii standard.

În cele ce urmează vom trata o problemă deterministă, respectiv o problemă în care durata fiecărei activități este presupusă cunoscută și bine determinată. Acceptăm de asemenea că succesiunea în care se desfășoară activitățile este unic determinată. Graful asociat proiectului se construiește reprezentînd prin noduri evenimentele, adică momentele în timp în care sfîrșesc unele activități și încep altele. Activitățile sînt reprezentate în graf prin arce direcționate care leagă nodurile. Arcele incidente unui nod spre interior reprezintă activități care trebuie să se sfîrșească înainte de a începe vreo activitate reprezentată printr-un arc incident aceluiași nod spre exterior.

Graful din fig. 23 reprezintă un proiect care cuprinde 8 evenimente și 11 activități.

Din acest graf reiese că activitatea (6,8) nu poate fi începută înainte de a fi terminate activitățile (3,6), (4,6) și (5,6).

Un drum într-un graf este prin definiție o succesiune de arce adiacente. De exemplu, în graficul din fig. 23 există patru drumuri care conduc de la evenimentul 1 la 6, și anume:

— drumul I trece prin nodurile 1,2,3,6 sau este format din arcele (1,2); (2,3) și (3,6);

— drumul II trece prin nodurile 1,3,6 și este format din arcele (1,3) și (3,6);

— drumul III trece prin nodurile (1,2,4,6), deci conține succesiunea de arce (1,2); (2,4) și (4,6);

— drumul IV trece prin nodurile (1,5,6), deci conține arcele (1,5) și (5,6).

Scanned with OKEN Scanner

Se spune că un eveniment s-a produs cînd sînt îndeplinite toate activităţile studiate pe drumurile incidente spre interior, în nodul care reprezintă evenimentul. De aici se deduce că pentru a determina momentul în care se produce evenimentul K se calculează durata fiecărui drum care leagă nodul iniţial de nodul K, adică timpul necesar pentru parcurgerea fiecărui drum incident spre interior în nodul K. Durata maximă astfel găsită este momentul în care se produce evenimentul.

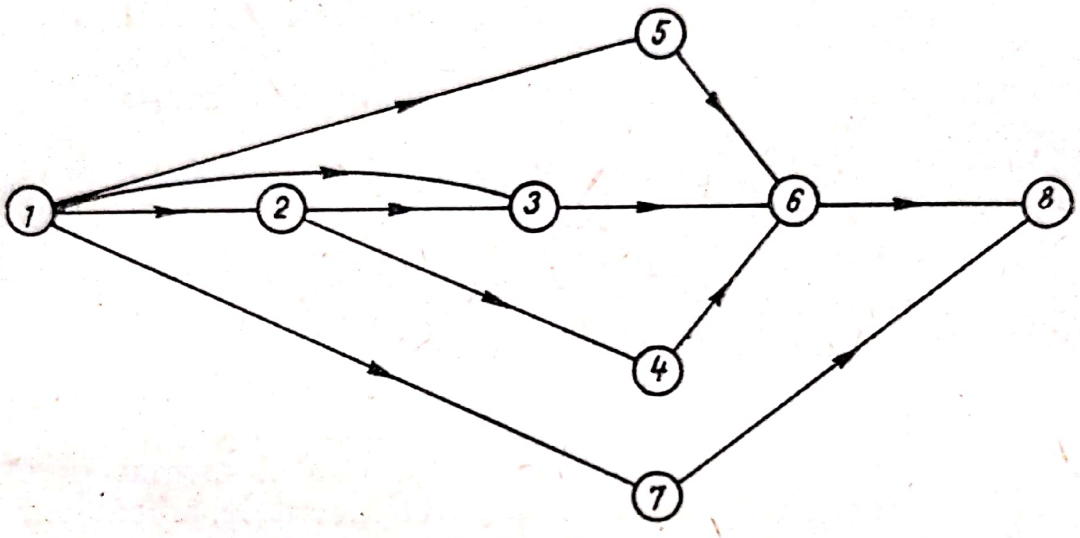


Fig. 23

Se obişnuieşte să se folosească termenul de ,,lungime'' a drumului în loc de ,, durată''. Deoarece în teoria grafelor ,,lungimea'' unui drum este definită ca fiind egală cu numărul arcelor care îl compun, credem că este preferabil să fie folosită termenul de ,,durată'', pentru a exprima timpul necesar pentru parcurgerea unui drum.

Durata unui proiect este egală cu durata maximă calculată pe mulţimea drumurilor care leagă nodul iniţial de nodul final. Pentru a calcula durata unui poiect trebuie calculat timpul cel mai scurt t_{ij} în care se poate produce evenimentul E_j. Deoarece evenimentul E_j se produce numai după ce au fost îndeplinite toate activităţile reprezentate în graf prin arcele incidente spre interior în nodul j, avem

$$t_j = \max_{(i,j) \in U_j^-} (t_i + t_{ij}) ; \qquad j = 2, 3, \ldots, n, \tag{V.4.3}$$

dacă pentru evenimentul iniţial se ia

$$t_{i_1} = 0. \tag{V.4.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

În formula (V.4.3) s-a notat cu U_j^- mulțimea arcelor incidente spre interior în nodul j.

Timpul t_n necesar producerii evenimentului final E_n este durata proiectului. Drumul care leagă nodul inițial de cel final și are durata egală cu t_n este drumul critic, iar activitățile situate pe acest drum sînt activități critice.

Pentru a exemplifica vom calcula durata unui proiect al cărui graf este arătat în fig. 24. Numerele înscrise pe fiecare arc arată durata fiecă-

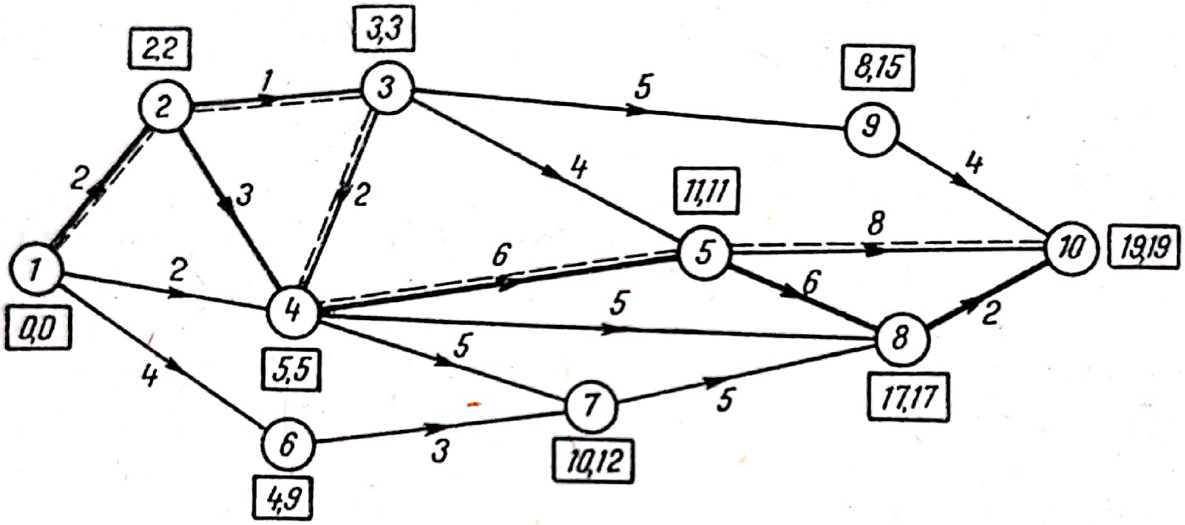


Fig. 24

rei activități din proiect. Luînd $t_1 = 0$ avem $t_2 = t_1 + t_{1,2} = 2$, deoarece există un singur drum care leagă nodul 1 cu 2:

$$t_3 = t_2 + t_{1,3} = 3,$$

$$t_4 = \max\{t_1 + t_{1,4}\,;\, t_2 + t_{2,4}\,;\, t_3 + t_{3,4}\} = \max\{2\,;\,5\,;\,5\} = 5,$$

$$t_5 = \max\{t_3 + t_{3,5}\,;\, t_4 + t_{4,5}\} = \{7\,;\,11\} = 11,$$

$$t_6 = t_1 + t_{1,6} = 4,$$

$$t_7 = \max\{t_4 + t_{4,7}\,;\, t_6 + t_{6,7}\} = \max\{10\,;\,7\} = 10,$$

$$t_8 = \max\{t_4 + t_{4,8}\,;\, t_5 + t_{5,8}\,;\, t_7 + t_{7,8}\} = \max\{10\,;\,17\,;\,15\} = 17,$$

$$t_9 = t_3 + t_{3,9} = 8,$$

$$t_{10} = \max\{t_5 + t_{5,10}\,;\, t_8 + t_{8,10}\,;\, t_9 + t_{9,10}\} = \max\{19\,;\,19\,;\,12\} = 19.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din acest calcul rezultă că durata totală a proiectului este de 19 unități de timp. În graf apar următoarele drumuri critice:

— primul trece prin nodurile: 1,2,4,5,8,10;
— al doilea prin nodurile: 1,2,4,5,10;
— al treilea prin nodurile: 1,2,3,4,5,8,10;
— al patrulea prin nodurile: 1,2,3,4,5,10.

Drumurile critice sînt puse în evidență mai ușor dacă se calculează și timpul cel mai tîrziu t_i^* la care poate fi realizat evenimentul E_i, astfel încît durata totală a proiectului să nu se modifice. Este evident că:

$$t_i^* = \min_{(i,j) \in U^+} (t_j^* - t_{ij}); \qquad i = 2, \ldots, n-1, \tag{V.4.5}$$

dacă se ia

$$t_n^* = t_n \text{ și } t_1^* = t_1 = 0. \tag{V.4.6}$$

În formula (V. 4.5) s-a notat cu U^+ mulțimea arcelor incidente spre interior în nodul i.

Pentru exemplul dat găsim:

$$t_{10}^* = 19,$$

$$t_9^* = t_{10}^* - t_{9,10} = 15,$$

$$t_8^* = t_{10}^* - t_{8,10} = 17,$$

$$t_7^* = t_8^* - t_{7,8} = 12,$$

$$t_6^* = t_7^* - t_{6,7} = 9,$$

$$t_5^* = \min\{t_{10}^* - t_{5,10}; t_8^* - t_{5,8}\} = \min\{11; 11\} = 11,$$

$$t_4^* = \min\{t_8^* - t_{4,8}; t_7^* - t_{4,7}; t_5^* - t_{4,5}\} = \min\{12; 7; 5\} = 5,$$

$$t_3^* = \min\{t_9^* - t_{3,9}; t_5^* - t_{3,5}; t_4^* - t_{3,4}\} = \min\{10; 7; 3\} = 3,$$

$$t_2^* = \min\{t_4^* - t_{2,4}; t_3^* - t_{2,3}\} = \min\{2; 2\} = 2,$$

$$t_1^* = \min\{t_6^* - t_{1,6}; t_4^* - t_{1,4}; t_2^* - t_{1,2}\} = \min\{5; 3; 0\} = 0.$$

Evenimentul E_i se poate produce în orice moment din intervalul $[t_i, t_i^*]$, fără ca durata totală a poiectului să se modifice. Acest interval este denumit *„rezervă de timp"* sau *„interval de flotare"* pentru eveni-

Scanned with OKEN Scanner

t_i	t_i^*	E_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	①		2 − 2 +0 | 2 | / | 0 |		5 − 2 +0 | 2 | / | 3 |		11 − 4 +0 | 4 | / | 7 |				
2	2	②			3 − 1 +2 | 3 | / | 2 |	5 − 3 +2 | 5 | / | 2 |					
3	3	③				5 − 2 +3 | 5 | / | 3 |	11 − 4 +3 | 7 | / | 7 |			15 − 5 +3 | 8 | / | 10 |	
5	5	④					11 − 6 +5 | 11 | / | 5 |		12 − 5 +5 | 10 | / | 7 |	17 − 5 +5 | 10 | / | 12 |	
11	11	⑤								17 − 6 +11 | 17 | / | 11 |	19 − 8 +11 | 19 | / | 11 |
4	11	6							12 − 3 +4 | 7 | / | 11 |			
10	12	7								17 − 5 +10 | 15 | / | 12 |		
17	17	⑧										19 − 2 +17 | 19 | / | 17 |
8	15	9										19 − 4 +8 | 12 | / | 15 |
19	19	⑩										
t_j			0	2	3	5	11	4	10	17	8	19
t_j^*			0	2	3	5	11	11	12	17	15	19

Scanned with OKEN Scanner

t_i	t_i^*	E_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	①		2 − 2 +0 | 2 / 0 |		5 − 2 +0 | 2 / 3 |		11 − 4 +0 | 4 / 7 |			
2	2	②			3 − 1 +2 | 3 / 2 |	5 − 3 +2 | 5 / 2 |					
3	3	③				5 − 2 +3 | 5 / 3 |	11 − 4 +3 | 7 / 7 |			15 − 5 +3 | 8 / 10 |	
5	5	④					11 − 6 +5 | 11 / 5 |		12 − 5 +5 | 10 / 7 |	17 − 5 +5 | 10 / 12 |	
11	11	⑤								17 − 6 +11 | 17 / 11 |	19 − 8 +11 | 19 / 11 |
4	11	6							12 − 3 +4 | 7 / 11 |			
10	12	7								17 − 5 +10 | 15 / 12 |	
17	17	⑧										19 − 2 +17 | 19 / 17 |
8	15	9										19 − 4 +8 | 12 / 15 |
19	19	⑩										
t_j			0	2	3	5	11	4	10	17	8	19
t_j^*			0	2	3	5	11	11	12	17	15	19

Scanned with OKEN Scanner

mentul E_i. Evenimentele situate pe drumul critic sau nodurile prin care trece drumul critic au intervale de flotare* nule. Oricît de simple sînt calculele pentru determinarea

— *„timpului cel mai avansat"* t_i de realizare a evenimentului E_i;

— *„timpului cel mai întîrziat"* t_i^* de realizare a evenimentului E_i;

— intervalului de flotare $[t_i, t_i^*]$,

aceste calcule sînt totuşi greu de urmărit într-un proiect cu un număr mare de activităţi. Greşelile care se pot comite în calculul acestor mărimi neglijînd unul din drumurile grafului sînt evitate dacă se foloseşte forma tabelului (163).

Dacă evenimentele proiectului sînt numerotate în aşa fel încît în orice nod k să nu existe decît arce incidente spre interior (i,k) pentru care $i < k$ şi arce incidente spre exterior (k, j) astfel încît $k < j$, atunci în tabelul (126) toate activităţile se situează deasupra diagonalei. Această numerotare este totdeauna posibilă [39]. În centrul fiecărui pătrat (i,j) se scrie durata t_{ij} a activităţii. Luînd $t_1 = 0$, timpul cel mai avansat de realizare a evenimentelor E_2, E_4, E_6 direct conectate cu evenimentul iniţial E_1 se calculează adunînd t_1 cu duratele activităţilor care conduc de la evenimentul E_1 la E_2, E_4 şi E_6. În tabel, duratele acestor activităţi sînt înscrise în centrul pătratelor corespunzătoare din linia întîi, iar sumele obţinute, în colţul din dreapta sus. Astfel s-a calculat $t_2 = 2$, care se scrie atît în coloana a doua pe linia t_j, cît şi pe linia a doua în coloana t_i. Evenimentele direct conectate cu E_2 sînt E_3 şi E_4 şi timpul cel mai avansat în care se realizează aceste evenimente se găseşte adunînd t_2 cu $t_{2,3}$, respectiv $t_{2,4}$ scrise în pătratele liniei a doua din tabel.

Rezultatele acestor operaţii se înscriu în colţul din dreapta sus al pătratelor din linia a doua. Astfel găsim $t_3 = 3$, care se trece atît în coloana a treia (linia t_j), cît şi în linia a treia (coloana t_i) şi apoi se adună cu toţi t_{3j} care se găsesc în această linie. Pentru t_4 se alege *cel mai mare dintre numerele înscrise în colţurile dreapta-sus* în coloana a patra; avem astfel $t_4=5$, cu ajutorul căruia se continuă calculele şi se obţine în final $t_{10} = 19$. Pentru a calcula t_i^* avem $t_n^* = 19$. Din 19 se scad duratele tuturor activităţilor care se sfîrşesc în nodul 10. Aceste activităţi apar în coloana a zecea a tabelului. Diferenţele găsite astfel se înregistrează în colţul din stînga-jos al fiecărui patrat. Cu ajutorul acestui calcul găsim $t_9^* = 15$, care se scrie atît în linia a noua (coloana

---

* Adoptăm denumirea de „interval de flotare" pentru $[t_i; t_i^*]$, pentru a evita confuziile cu rezervele de timp ale activităţilor care vor fi definite ulterior.

Scanned with OKEN Scanner

t_i^*), cît și în coloana a noua (linia t_j^*). Calculele continuă în același fel. Dacă într-o linie a tabelului există mai multe pătrate în care s-au făcut înregistrări, t_j^* este egal *cu cel mai mic dintre numerele înscrise în colțurile din stînga-jos*. De exemplu, în linia a patra găsim numerele 5,7 și 12, iar $t_4^* = 5$.

Se observă cu ușurință că acest tabel nu constituie decît aplicarea sistematizată a formulelor (V. 4.3) și (V.4.5).

Valorile din coloanele t_i, t_i^* sau din liniile t_j, t_j^* dau intervalele de flotare a evenimentelor. Astfel, pentru exemplul ales, se citește direct din tabel că evenimentele care au rezerve de timp nule sînt E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_8 și E_{10}. Marcînd pe graf nodurile corespunzătoare apar drumurile critice.

Oricărei activități (ij) a proiectului i se pot atașa următoarele numere:

$$R_t\,(ij) = t_j^* - t_i^* - t_{ij}, \qquad \text{(V.4.7)}$$

denumit *„rezerva totală"* de timp a activității (ij);

$$R_l(ij) = t_j - t_i - t_{ij}, \qquad \text{(V.4.8)}$$

denumit *„rezerva liberă"* a activității (ij);

$$R_s\,(ij) = t_j - t_i^* - t_{ij}, \qquad \text{(V. 4.9)}$$

denumit *„rezerva sigură"* a activității (ij).

Rezerva totală a unei activități arată care este timpul maxim cu care poate fi amînată executarea unei activități, fără a stînjeni realizarea proiectului la termenul prevăzut. Rezerva liberă arată întîrzierea maximă care se poate acorda pentru începerea activității (ij), respectîndu-se condiția ca evenimentul E_j să se realizeze în momentul t_j, sau care este timpul maxim care se poate acorda pentru îndeplinirea activității (ij) fără a se modifica datele t_i și t_j care încadrează activitatea și data t_n a îndeplinirii proiectului.

Un proiect este cu atît mai elastic cu cît intervalele de flotare a evenimentelor și rezervele libere ale activităților sînt mai mari.

Rezervele de timp ale activităților critice sînt nule. Pentru proiectul din exemplul anterior, evenimentele care nu aparțin nici unui drum critic sînt E_6, E_7 și E_9. Intervalul de flotare, de exemplu pentru E_7, este

Scanned with OKEN Scanner

[10;12], deci mărimea acestui interval este $12 - 10 = 2$. Rezervele de timp pentru activitatea (6,7) sînt

$$R_t(6,7) = 12 - 4 - 3 = 5; \qquad R_l(6,7) = 10 - 4 - 3 = 3;$$

$$R_s = 10 - 9 - 3 = -2.$$

În afară de metoda expusă, pentru determinarea drumului critic pot fi folosite algoritmele: Ford [9], Bellman-Kalaba [9]; Fulkerson [32], Dantzig [23]. Aceste algoritme își dovedesc utilitatea cu deosebire pentru determinarea drumului critic în proiectele cu un număr mare de activități. Noi nu vom insista asupra acestor metode, deoarece scopul acestui paragraf este de a aplica metodele programării parametrice pentru optimizarea costului unui proiect în funcție de durata proiectului. Vom expune metoda parametrică folosind exemplul cu aceeași temă, rezolvat prin algoritmul Fulkerson de A. Kaufmann și G. Desbazeille în cap. 4 din „La méthode du chemin critique". Alegînd acest exemplu al cărui graf este reprodus în fig. 23, dăm posibilitatea cititorilor să compare volumul de calcule necesare rezolvării problemei prin cele două algoritme — al programării parametrice și algoritmul Fulkerson — și să constate identitatea rezultatelor obținute. Duratele minime d_{ij} și maxime D_{ij} ale activităților proiectului și costurilor c_{ij} ale activităților în unitatea de timp sînt reproduse în tabelul (164).

(164)

t_{ij}	d_{ij}	D_{ij}	c_{ij}
t_{12}	11	20	1,00
t_{23}	30	50	1,50
t_{36}	32	52	3,00
t_{68}	6	8	5,00
t_{13}	12	36	4,66
t_{24}	21	27	6,00
t_{46}	25	50	1,00
t_{15}	33	36	1,00
t_{56}	60	80	2,00
t_{17}	12	22	1,30
t_{78}	50	90	2,00

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $t_{ij} = D_{ij}$ durata proiectului este $t_n = 130$ și drumul critic trece prin nodurile 1, 2, 3, 6, 8, așa cum rezultă din tabelul (165). Datele proiectului arată că fiecare activitate poate fi executată într-un timp D_{ij} considerat „*durata normală*" a activității (i,j) sau într-un timp d_{ij} denumit „*durata accelerată*". Costul fiecărei activități este minim cînd durata ei este normală, deci și costul proiectului este minim. Dacă toate activitățile se execută cu o durată accelerată se obține un program care asigură executarea proiectului în minimum de timp. Între aceste două alternative — cost minim, timp minim — există o gamă de soluții care se obțin rezolvînd programul matematic cu ajutorul modelului

$$d_{ij} \leqslant t_{ij} \leqslant D_{ij}, \tag{V.4.10}$$

$$\sum_{(i,j)\in\mu} t_{ij} \leqslant t_n \text{ pentru toți } \mu \in \mu_n^*, \tag{V.4.11}$$

$$\min \sum_{(i,j)\in U} p_{ij}, \tag{V.4.12}$$

în care s-a notat cu μ_n mulțimea drumurilor care leagă nodul inițial de cel final cu U mulțimea arcelor grafului sau a activităților proiectului și cu p_{ij} costul activității $(i\,;j)$.

Dacă p_{ij} sînt funcții liniare de duratele t_{ij} ale activităților și t_n este un parametru, modelul (V.4.10)— (V.4.12) reprezintă formularea unei probleme de programare liniară parametrică. Presupunînd că avem

$$p_{ij} = k_{ij} - c_{ij}\,t_{ij} \tag{V.4.13}$$

și $t_n = \lambda$ modelul problemei este

$$\begin{aligned}
&11 \leqslant t_{1,2} \leqslant 20\,; \quad 12 \leqslant t_{1,3} \leqslant 36\,; \quad 60 \leqslant t_{5,6} \leqslant 80\,;\\
&30 \leqslant t_{2,3} \leqslant 50\,; \quad 21 \leqslant t_{2,4} \leqslant 27\,; \quad 12 \leqslant t_{1,7} \leqslant 22\,;\\
&32 \leqslant t_{3,6} \leqslant 52\,; \quad 25 \leqslant t_{4,6} \leqslant 50\,; \quad 50 \leqslant t_{7,8} \leqslant 90\,;\\
&6 \leqslant t_{6,8} \leqslant 8\,; \quad 33 \leqslant t_{1,5} \leqslant 36\,;
\end{aligned} \tag{V.4.14}$$

$$\begin{aligned}
&t_{1,2} + t_{2,3} + t_{3,6} + t_{6,8} \leqslant \lambda\,; \quad t_{1,7} + t_{7,8} \leqslant \lambda\,;\\
&t_{1,3} + t_{3,6} + t_{6,8} \leqslant \lambda\,; \quad t_{1,5} + t_{5,6} + t_{6,8} \leqslant \lambda\,;\\
&t_{1,2} + t_{2,4} + t_{4,6} + t_{6,8} \leqslant \lambda\,;
\end{aligned} \tag{V.4.15}$$

$$\begin{aligned}
\max f = {} & t_{1,2} + 1{,}5t_{2,3} + 3t_{3,6} + 5t_{6,8} + 4{,}66t_{1,3} + 6t_{2,4} + t_{4,6} + \\
& + t_{1,5} + 2t_{5,6} + 1{,}3t_{1,7} + 2t_{7,8}.
\end{aligned} \tag{V.4.16}$$

Scanned with OKEN Scanner

în tabelul (165) și $t_{-} = 99$ rezultat dintr-un calcul anterior.

(165)

t_i	t_i^*	E_i	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	①		20 − 20 + 0 | 20 | 0 |	70 − 36 + 0 | 36 | 34 |		42 − 36 + 0 | 36 | 6 |		40 − 22 + 0 | 22 | 18 |	
20	20	②			70 − 50 + 20 | 70 | 20 |	72 − 27 + 20 | 47 | 45 |				
70	70	③						122 − 52 + 70 | 122 | 70 |		
47	72	4						122 − 50 + 47 | 97 | 72 |		
36	42	5						122 − 80 + 36 | 116 | 42 |		
122	122	⑥								130 − 8 + 122 | 130 | 122 |
22	40	7								130 − 90 + 22 | 112 | 40 |
130	130	⑧								

t_j	0	20	70	47	36	122	22	130
t_j^*	0	20	70	72	42	122	40	130
$t_j^* - t_j$	0	0	0	25	6	0	18	0

Scanned with OKEN Scanner

t_i	t_i^*	E_i	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	①		20 − 20 = 0 | 20 | +0	70 − 36 = 34 | 36 | +0		42 − 36 = 6 | 36 | +0		40 − 22 = 18 | 22 | +0	
20	20	②			70 − 50 = 20 | 70 | +20	72 − 27 = 45 | 47 | +20				
70	70	③						122 − 52 = 70 | 122 | +70		
47	72	4						122 − 50 = 72 | 97 | +47		
36	42	5						122 − 80 = 42 | 116 | +36		
122	122	⑥								130 − 8 = 122 | 130 | +122
22	40	7								130 − 90 = 40 | 112 | +22
130	130	⑧								

t_j	0	20	70	47	36	122	22	130
t_j^*	0	20	70	72	42	122	40	130
$t_j^* - t_j$	0	0	0	25	6	0	18	0

Scanned with OKEN Scanner

Limitele între care variază parametrul λ sînt $T_n = 130$ calculat în tabelul (165) și $t_n = 99$ rezultat dintr-un calcul analog. Deoarece graful este foarte simplu, calculul termenilor t_i și t_i^* se poate face direct pe graf. Astfel, pentru $t_{ij} = d_{ij}$ rezultatele sînt trecute în fig.25

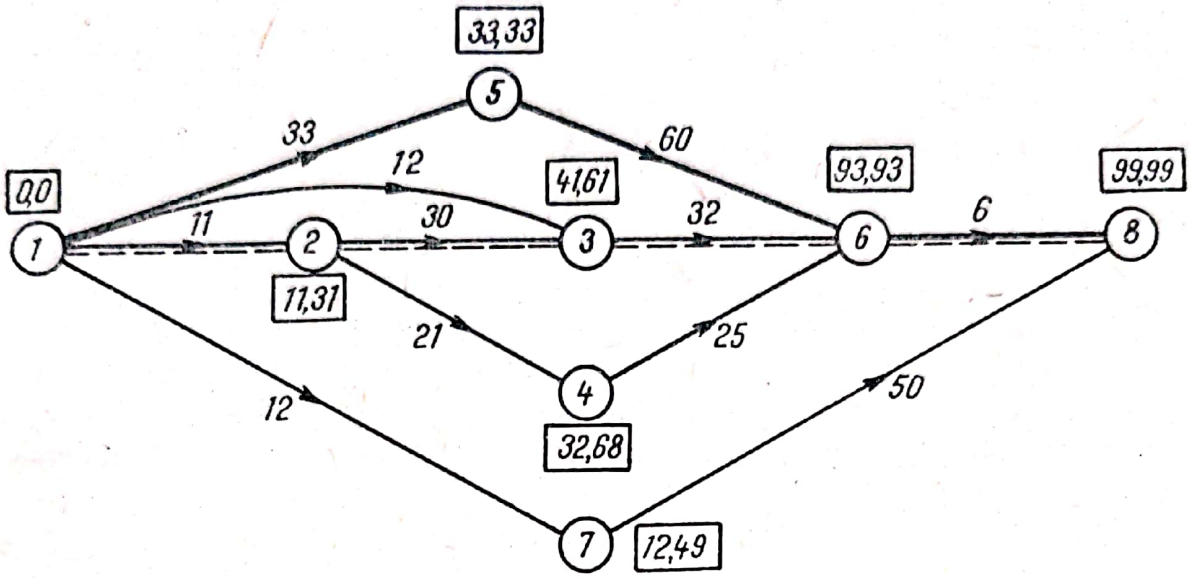


Fig. 25

în dreptunghiurile din dreptul fiecărui nod, numerele scrise pe arce fiind duratele activităților. Drumul critic trece, în acest caz, prin nodurile 1,5,6,8 și este marcat în graf prin linii groase, în timp ce drumul critic pentru $t_{ij} = D_{ij}$ trece prin nodurile 1,2,3,6, 8 și s-a marcat în fig. 25 prin linii punctate.

Modelul problemei conține 27 de restricții și 11 necunoscute. Numărul restricțiilor se reduce la 16 prin schimbările de variabile

$$t_{ij} - d_{ij} = x_s, \qquad \text{(V.4.17)}$$

care transformă limitările inferioare ale variabilelor în condiții de nenegativitate. Numerotînd noile variabile x_s în ordinea în care apar t_{ij} în tabelul (163), după schimbarea variabilelor, modelul problemei este :

$$\begin{array}{lll} x_1 \leqslant 9; & x_5 \leqslant 24; & x_9 \leqslant 20; \\ x_2 \leqslant 20; & x_6 \leqslant 6; & x_{10} \leqslant 10; \\ x_3 \leqslant 20; & x_7 \leqslant 25; & x_{11} \leqslant 40; \\ x_4 \leqslant 2; & x_8 \leqslant 3; & \end{array} \qquad \text{(V.4.18)}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant \lambda - 79; \quad x_{10} + x_{11} \leqslant \lambda - 62;$$
$$x_3 + x_4 + x_5 \leqslant \lambda - 50; \quad x_4 + x_8 + x_9 \leqslant \lambda - 99;$$
$$x_1 + x_4 + x_6 + x_7 \leqslant \lambda - 63; \qquad \text{(V.4.19)}$$

$$x_i \geqslant 0;\ i = 1, \ldots, 11;$$
$$99 \leqslant \lambda \leqslant 130; \qquad \text{(V.4.20)}$$

$$\max \varphi = 657{,}52 + x_1 + 1{,}5\,x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 4{,}66x_5 +$$
$$+ 6x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 1{,}3x_{10} + 2x_{11}. \qquad \text{(V.4.21)}$$

Rezolvarea acestei probleme se poate face folosind algoritmul specific problemelor de programare liniară cu variabile mărginite superior [21]. Noi vom folosi însă algoritmul simplex. Notăm cu $\eta_1, \ldots, \eta_{16}$ variabilele de abatere care transformă inecuațiile (V.4.18)—(V.4.19) în ecuații. Baza inițială B_0 este formată din vectorii asociați variabilelor de abatere și nu este optimă, fiindcă toate diferențele $\varphi_j - c_j$ sînt negative. În iterația 8 se obține o bază optimală căreia îi corespunde soluția

$$\eta_1 = 9; \quad \eta_2 = 20; \quad \eta_3 = 1; \quad x_4 = \lambda - 99;$$
$$\eta_8 = 3; \quad \eta_9 = 20; \quad \eta_{10} = 10; \quad \eta_{11} = 102 - \lambda;$$
$$x_{11} = \lambda - 62; \quad \eta_4 = 101 - \lambda;$$
$$x_5 = 24; \quad x_6 = 6; \quad x_7 = 25;$$
$$x_3 = 19; \quad \eta_{13} = 6; \quad \eta_{14} = 5. \qquad \text{(4.4.22)}$$

Această soluție este optimă pentru

$$99 \leqslant \lambda \leqslant 101.$$

Programul corespunzător soluției (V. 4. 22) este

$$x_3 = t_{3,6} - 32 = 19; \quad t_{3,6} = 51;$$
$$x_4 = t_{6,8} - 6 = \lambda - 99; \quad t_{6,8} = \lambda - 93 = \begin{cases} 6 & \text{pentru } \lambda = 99, \\ 8 & \text{,,} \quad \lambda = 101; \end{cases}$$
$$x_5 = t_{1,3} - 12 = 24; \quad t_{1,3} = 36;$$
$$x_6 = t_{2,4} - 21 = 6; \quad t_{2,4} = 27;$$
$$x_7 = t_{4,6} - 25 = 25; \quad t_{4,6} = 50;$$
$$x_{11} = t_{7,8} - 50 = \lambda - 62; \quad t_{7,8} = \lambda - 12 = \begin{cases} 87 & \text{pentru } \lambda = 99, \\ 89 & \text{,,} \quad \lambda = 101; \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

celelalte variabile de structură sînt nule, deci activităţile care se execută cu durată accelerată sînt

$$\begin{aligned} x_1 &= t_{1,2} - 11 = 0, & t_{1,2} &= 11; \\ x_2 &= t_{2,3} - 30 = 0, & t_{2,3} &= 30; \\ x_8 &= t_{1,5} - 33 = 0, & t_{1,5} &= 33; \\ x_9 &= t_{5,6} - 60 = 0, & t_{5,6} &= 60; \\ x_{10} &= t_{1,7} - 12 = 0, & t_{1,7} &= 12. \end{aligned}$$

Deoarece $\eta_{12} = \eta_{14} = \eta_{15}$ sînt nule, restricţiile corespunzătoare sînt satisfăcute de soluţia (V. 4. 22) cu semnul egal, adică

$$\begin{aligned} t_{1,2} + t_{2,3} + t_{3,6} + t_{6,8} &= \lambda, \\ t_{1,7} + t_{7,8} &= \lambda, \\ t_{1,5} + t_{5,6} + t_{6,8} &= \lambda, \end{aligned}$$

deci avem trei drumuri critice, din care:

— primul trece prin nodurile 1,2,3,6,8;
— al doilea prin 1,7,8;
— al treilea prin 1,5,6,8,

toate avînd o durată de 99, respectiv 101 unităţi de timp. Deoarece $\eta_{13} = 6$ şi $\eta_{14} = 5$, celelalte două drumuri din graf care unesc nodul iniţial cu cel final au durata cu 6, respectiv cu 5 unităţi de timp mai scurtă decît a drumului critic. Costul proiectului pentru programul (V.4.22) este

$$\varphi = 268{,}36 + 7\lambda;$$

deci, pentru $\lambda = 99$, $\varphi = 961{,}36$ iar pentru $\lambda = 101$, $\varphi = 975{,}36$. Pentru $\lambda > 101$ variabila η_4 devine negativă şi este înlocuită în bază de x_9. Soluţia asociată acestei baze este optimă pentru $101 \leqslant \lambda \leqslant 102$. Dacă $\lambda > 102$ iese din bază η_{11}, fiind înlocuit de x_{10}. Baza astfel formată este optimă pentru $102 \leqslant \lambda \leqslant 112$. Dacă $\lambda > 112$ se formează o nouă bază optimă, înlocuind variabila η_{10} prin η_{15}. Programul corespun-

Scanned with OKEN Scanner

zător își păstrează optimalitatea pentru $112 \leqslant \lambda \leqslant 121$. Dacă $\lambda > 121$, η_9 este înlocuit de η_{16} și soluția găsită acoperă intervalul $[121,124]$; în sfîrșit, o nouă iterație conduce la determinarea soluției optime pentru $124 \leqslant \lambda \leqslant 130$. Duratele activităților pentru valorile critice ale parametrului sînt înscrise în tabelul (166) în care s-au trecut din

(166)

t_{ij}	$\lambda = 99$	$\lambda = 101$	$\lambda = 102$	$\lambda = 112$	$\lambda = 121$	$\lambda = 124$	$\lambda = 130$	d_{ij}	D_{ij}
$t_{1,2}$	11	11	11	11	11	14	20	11	20
$t_{2,3}$	30	30	31	41	50	50	50	30	50
$t_{3,6}$	52	52	52	52	52	52	52	32	52
$t_{6,8}$	6	8	8	8	8	8	8	6	8
$t_{1,3}$	36	36	36	36	36	36	36	12	36
$t_{2,4}$	27	27	27	27	27	27	27	21	27
$t_{4,6}$	50	50	50	50	50	50	50	25	50
$t_{1,5}$	33	33	33	33	33	36	36	33	36
$t_{5,6}$	60	60	61	71	80	80	80	60	80
$t_{1,7}$	12	12	12	22	22	22	22	12	22
$t_{7,8}$	87	89	90	90	90	90	90	50	90
Drum critic	1,2,3,6,8 1,5,6,8 1,7,8	1,2,3,6,8 1,5,6,8 1,7,8	1,2,3,6,8 1,5,6,8 1,7,8	1,2,3,6,8 1,5,6,8 1,7,8	1,2,3,6,8 1,5,6,8 —	1,2,3,6,8 1,5,6,8 —	1,2,3,6,8 — —		

nou și duratele normale și accelerate ale activităților, pentru a înlesni comparația între acestea și duratele optime din programele calculate.

Cît timp λ ia valori în intervalul $[99,112]$, proiectul are trei drumuri critice; pentru $\lambda \in [121,124]$ există două drumuri critice și pentru $\lambda = 130$ unul singur.

Așa cum era de așteptat, toate activitățile se execută cu durata normală pentru $\lambda = 130$, în timp ce pentru $\lambda = 99$ numai activitățile situate pe cele trei drumuri critice au durată accelerată.

Scanned with OKEN Scanner

Programarea parametrică poate răspunde problemei propuse dar dimensiunile modelului sînt determinate de numărul activităţilor şi de numărul drumurilor care conduc de la nodul iniţial la cel final. Modelele pentru proiecte mari pot depăşi capacitatea de rezolvare a maşinilor electronice, de aceea s-au cercetat şi alte metode pentru optimizarea costului executării proiectului în funcţie de timp. Printre acestea menţionăm, pe lîngă algoritmul Ford-Fulkerson deja amintit, aplicarea algoritmului primal-dual în programul parametrizat expusă de James E. Kelley în „Critical-path planning and sheduling: Mathematical Basis", publicată în Operations Research, vol. 9, nr. 13 din 1961, şi metoda bazată pe teoria mulţimilor segmentabile, expusă de B.Roy şi M. Simonnard în articolul „Nouvelle méthode permettant d'explorer un ensemble de possibilités et de déterminer un optium" din Revue Française de Recherche Opérationnelle, Nr. 18/1961. Această metodă are avantajul de a fi aplicabilă şi pentru funcţii neliniare de cost.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VI

PROGRAMAREA NELINIARĂ

§ 1. INTRODUCERE

Problema programării matematice, în forma cea mai generală, constă în a determina un vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ în spațiul real R^n, care satisface m restricții:

$$g_i(x) \{\geqslant; =; \leqslant\} b_i \qquad \text{(VI.1.1)}$$

și optimizează (maximizează sau minimizează) o funcție

$$z = f(x). \qquad \text{(VI.1.2)}$$

Pe lîngă restricțiile (VI.1.1), problemele de programare matematică mai pot conține și altele, ca de exemplu:

— condiții de nenegativitate pentru unele sau toate componentele vectorului x;

— condiția ca unele sau toate componentele vectorului x să fie numere întregi.

Dacă restricțiile $g_i(x)$; $i = 1, \ldots, m$ și funcția obiectiv $f(x)$ sînt funcții liniare de componentele x_j, $j = 1, \ldots, n$ ale vectorului x și acestor componente nu li se impun decît condiții de nenegativitate, modelul (VI.1.1)—(VI.1.2) constituie o problemă de programare liniară. Toate algoritmele pentru rezolvarea problemelor de programare liniară folosesc condițiile de nenegativitate a variabilelor x_j, astfel încît, în problemele care nu impun restricții de semn tuturor variabilelor, prin transformări simple se introduc aceste condiții.

Dacă unele sau toate variabilele x_j trebuie să ia valori numere întregi sau să îndeplinească alte condiții, chiar dacă $g_i(x)$ și $f(x)$ sînt funcții liniare, problema nu mai constituie o problemă de programare liniară în sens clasic. Vom denumi „programare neliniară" acele probleme în care:

— restricțiile sînt liniare și funcția obiectiv neliniară, sau

— restricțiile sînt neliniare și funcția obiectiv liniară, sau

— atît restricțiile cît și funcția obiectiv sînt neliniare.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru problemele de programare liniară există metode generale de rezolvare, dar nu se cunoaște încă o astfel de metodă pentru problema generală de programare neliniară. Dintre clasele de probleme de programare neliniară, cea mai amănunțit studiată este aceea în care restricțiile sînt liniare și funcția obiectiv este neliniară. Printre acestea se bucură de o atenție deosebită două subclase, și anume acelea în care:

A. *Funcția obiectiv este separabilă*, adică poate fi scrisă ca o sumă de n funcții, fiecare dintre acestea fiind funcție de o singură variabilă, adică

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n). \quad \text{(VI.1.3)}$$

B. *Funcția obiectiv este suma unei funcții liniare și a unei forme patratice*, adică

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \quad \text{(VI.1.4)}$$

sau, scrisă ca funcție de vectorul x,

$$z = f(x) = p'x + \frac{1}{2} x' Cx, \quad \text{(VI.1.5)}$$

în care $p = [p_1, \ldots, p_n]$ este un vector-coloană cu n componente sau, cu alte cuvinte, o matrice de dimensiuni $n \times 1$, p' fiind transpusa matricei; $C = (c_{ij})$; $i, j = 1, \ldots, n$; $c_{ij} = c_{ji}$ este o matrice simetrică de dimensiuni $n \times n$, numită matricea formei pătratice, iar $x = [x_1, \ldots, x_n]$ este un vector-coloană cu n componente.

Studiul problemelor de programare neliniară a căpătat amploare din anul 1951, cînd H. W. Kuhn și A. W. Tucker au publicat importanta lucrare intitulată „Nonlinear Programming" [47], în care se stabilesc condițiile necesare și suficiente pentru ca o soluție a unei probleme de programare neliniară să fie optimă. Deși această lucrare nu oferă o metodă de calcul a soluției, totuși ea a constituit baza teoretică a multora din lucrările ulterioare în acest domeniu.

Problema minimizării unei funcții separabile cu restricții liniare a fost rezolvată printr-o metodă de aproximare de A. Charnes și C. Lemke [16]. O altă formulare a aceleiași probleme se datorește lui G. B. Dantzig [22].

Problema programării pătratice a constituit preocuparea multor matematicieni: E. Barankin și R. Dorfman, E. M. L. Beale, H. Markowitz, H. Houthakker [43], P. Wolfe [77], Hildreth [41], D'Esopo [26], Künzi [48] etc.

Scanned with OKEN Scanner

Metodele de rezolvare pentru problemele de programare pătratică stabilite de diferiți autori diferă puțin unele de altele. Printre cele mai cunoscute sînt:

— metoda P. Wolfe, care reduce problema de programare pătratică la două probleme succesive de programare liniară, ale căror soluții se obțin prin ușoare modificări aduse algoritmului simplex; o variantă a acestei metode este dată de G.B.Dantzig în tratatul său „Linear Programming and Extensions";

— metoda Beale constituie o extindere a metodei simplex la programarea pătratică, plecîndu-se de la un punct admisibil și ajungînd la altul în care funcția obiectiv ia o valoare mai mică sau mai mare, după scopul urmărit;

— metoda Theil și Van De Panne pornește de la o analiză a soluțiilor admisibile, determinînd criterii simple pentru eliminarea celor care nu satisfac condiția de optim;

— metoda lui Barankin și Dorfman, folosind condițiile teoremei lui Kuhn—Tucker, constituie de asemenea o extindere a transformărilor simplex pe baza unui algoritm găsit de autori.

La noi în țară, Elena Mocanu a publicat articolele „Observații asupra rezolvării problemelor de programare patratică" în Studii și Cercetări de Matematică (Cluj), tomul XIV, 2, 1963, și „Sur la résolution des problèmes de programmation quadratique", în Mathematica, vol. 6(29) 1, 1964. Aceste lucrări oferă metode de transformare a problemelor de programare pătratică cu restricții de forma $g_i(x) = a_i$ în probleme cu restricții de forma $u_i \geqslant a_i$. În cele ce urmează vom expune rezultatele obținute de E. Mocanu, care au meritul de a simplifica problema determinării soluției optime.

Revenind la problemele generale de programare neliniară, prezentăm o schiță a metodelor folosite în diferite cazuri pentru determinarea unei soluții optime relative. Prin optim relativ se înțelege soluția valabilă numai într-o strînsă vecinătate a punctului optim. În § 2 se va arăta că un optim relativ este optim absolut, deci soluție a problemei, dacă funcția obiectiv $f(x)$ este convexă (sau concavă) și toate restricțiile sînt convexe.

Metodele gradientului diferențial direct folosesc ideea de a deplasa un punct-soluție realizabilă în direcția creșterii (sau descreșterii) maxime a funcției obiectiv, cu condiția de a respecta restricțiile. Se pare că această clasă de metode nu duce la rezultate mulțumitoare.

Metodele gradientului diferențial al lui Lagrange introduc explicit multiplicatorii Lagrange. Convergența procedeului este asigurată numai dacă funcția obiectiv este strict concavă și restricțiile strict convexe. Pentru problemele de programare liniară procedeul nu este conver-

Scanned with OKEN Scanner

No	Metodele	Funcţia obiectiv	Restricţiile	Condiţii de convergenţă	
				Funcţia obiectiv	Restricţii
1	Gradientului diferenţial direct	neliniară	neliniare	nu se cunosc	
2	Gradientului diferenţial al lui Lagrange	neliniară	neliniare	strict concavă	strict convexe
3	Simplex pentru programare pătratică	pătratică	liniare	concavă	convexe
4	Gradientului proiectat I	neliniară	liniare	—	—
5	Gradientului proiectat II	neliniară	neliniare	concavă	convexe
6	Gradientului redus	neliniară	liniare	—	—
7	Programării separabile	neliniară	neliniare	—	—
8	Descompunerii	neliniară	neliniare	concavă	convexe
9	Tăieturii plane	neliniară	neliniare	concavă	convexe
10	Accelerată a tăieturii plane	neliniară	liniare	concavă	convexe

gent. Această metodă nu este preferabilă precedentei, deoarece necesită un volum mare de calcule, chiar pentru rezolvarea problemelor de dimensiuni mici.

Metoda simplex pentru problemele de programare pătratică prezintă trei variante remarcabile, care sînt datorate lui Beale, Wolfe şi Dantzig. Fiecare dintre aceste procedee conduc la determinarea soluţiei exacte a problemei prin metode de programare liniară. Atît pentru procedeul Beale, cît şi pentru procedeul Wolfe s-au realizat programe la maşinile electronice de calcul.

Metodele „gradientului-proiectat" I şi *II*, pornind de la aceeaşi idee ca şi metoda gradientului diferenţial, caută să asigure punctului x o deplasare cît mai mare, cu condiţia de a respecta restricţiile. Se pare că această metodă poate fi aplicată în toate problemele de programare neliniară, deoarece nu cere ca funcţiile să aibă anumite proprietăţi.

* Acest tabel este prezentat de P. Wolfe în „Methods of Nonlinear Programming" publicat în Recent Advances in Mathematical Programming editat de Robert L. Graves, Mc Graw-Hill Book Co., 1963.

Scanned with OKEN Scanner

Metoda gradientului redus poate fi folosită ca o extindere a metodei simplex ; ea foloseşte de asemenea gradientul funcţiei obiectiv pentru a determina direcţia în care trebuie deplasat un punct-soluţie.

Metoda programării separabile înlocuieşte programul neliniar cu un program liniar construit astfel încît să constituie o bună aproximare pentru problema dată. În acest scop se alege o reţea de puncte $x^1, x^2, \ldots, x^T$. Orice punct x din cea mai mică mulţime convexă care conţine aceste puncte poate fi scris sub forma

$$x = \sum_{t=1}^{T} \lambda^t x^t, \text{ unde } \sum_{t=1}^{T} \lambda^t = 1 \text{ şi } \lambda^t \geqslant 0 \text{ pentru toţi } t.$$

Orice funcţie $f(x)$ este liniarizată pe reţeaua de puncte $x^1, x^2, \ldots, x^T$ prin aproximaţia

$$f(x) = \sum_{t=1}^{T} \lambda^t f(x^t).$$

O problemă de programare neliniară avînd modelul (VI.1.1)—(VI.1.2) este aproximată prin această metodă de problema de programare liniară

$$\sum_t \lambda^t g_i(x^t) \{ \geqslant, =, \leqslant \} b_i; \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\lambda^t \geqslant 0; \quad \sum_t \lambda^t = 1, \tag{VI.1.6}$$

$$\max \text{ (min)} \sum_t \lambda^t f(x^t).$$

Variabilele modelului (VI.1.6) sînt λ^t. Soluţia optimă $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}^1, \ldots, \bar{\lambda}^T)$ a modelului liniar conduce la soluţia aproximativă

$$\bar{x} = \sum_t \bar{\lambda}^t x^t \tag{VI.1.7}$$

a problemei iniţiale. Dacă funcţiile $g_i(x)$ sînt convexe şi funcţia obiectiv $f(x)$ este concavă, $\bar{x}$ dă o margine inferioară a valorilor funcţiei obiectiv. Dacă fiecare dintre funcţiile neliniare ale problemei iniţiale este separabilă, adică se poate scrie

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \text{ pentru } i = 1, \ldots, m$$

şi

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j), \tag{VI.1.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

liniarizarea se face pentru fiecare variabilă x_j și în acest caz problema de programare liniară este

$$\max \sum_j \sum_t \lambda_j^t f(x_j^t), \tag{VI.1.9}$$

cu condițiile

$$\lambda_j^t \geqslant 0 \text{ pentru toți } j\,; \quad \sum_t \lambda_j^t = 1,$$

$$\sum_j \sum_t \lambda_j^t g_{ij}(x_j^t) \leqslant 0 \text{ pentru toți } i, \tag{VI.1.10}$$

soluția problemei inițiale fiind

$$\bar{x}_j = \sum_t \bar{\lambda}_j^t x_j^t \text{ pentru toți } j, \tag{VI.1.11}$$

dacă $\bar{\lambda}^t$ este soluția problemei anterioare de programare liniară.

Metoda descompunerii. În programarea liniară metoda descompunerii este folosită pentru rezolvarea problemelor de dimensiuni mari, cu anumite forme particulare. Metoda constă în a construi o succesiune de probleme mici ale căror soluții conduc la soluția problemei inițiale. În programarea neliniară se aplică aceeași metodă după înlocuirea modelului inițial printr-un program liniar de forma (VI.1.9)—(VI.1.10), construit pe o rețea compusă dintr-un mare număr de puncte.

Metoda tăieturii plane. Această metodă se aplică numai în cazul în care restricțiile sînt funcții concave. Ideea de bază este înlocuirea restricțiilor neliniare $g_i(x) \leqslant 0$ prin restricțiile liniare

$$g_i(x^t) + \nabla g_i(x)(x - x^t) \leqslant 0, \tag{VI.1.12}$$

în care x^t este un vector oarecare. Deoarece $g_i(x)$ este concavă, membrul stîng al inegalității este totodeauna mai mic decît $g_i(x)$; prin urmare, dacă x^* este o soluție a sistemului $g_i(x) \leqslant 0$, atunci este o soluție și pentru (VI. 1. 12) oricare ar fi x^t. Dacă problema care trebuie rezolvată este

$$\max \text{ (min) } z = cx \tag{VI.1.13}$$

cu condițiile neliniare,

$$g_i(x) \leqslant 0\,;\ i = 1, \ldots, m, \tag{VI.14}$$

se alege o succesiune de vectori $x^1, \ldots, x^T$ și se construiește problema de programare liniară

$$\max \text{ (min) } z = cx,$$

cu condițiile

$$g_i(x^t) + \nabla g_i(x^t)(x - x^t) \leqslant 0\,;\ i = 1, \ldots, m\,;\ t = 1, \ldots, T. \tag{VI.1.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

O soluţie $x = \bar{x}$ a problemei astfel construite, care verifică şi sistemul de restricţii al problemei originale, este şi soluţia acesteia fiindcă optimizează funcţia obiectiv pe mulţimea (VI. 1. 15) care include mulţimea (VI. 1.14). Dacă $\bar{x}$ nu satisface sistemul iniţial de restricţii, se defineşte $x^{r+1} = \bar{x}$, care este folosit pentru a construi alt sistem de restricţii de forma (VI. 1. 15), deci o nouă problemă de programare liniară. Dacă funcţia obiectiv este şi ea neliniară, metoda expusă conduce totuşi la înlocuirea problemei originale cu una mai simplă.

§ 2. FUNCŢII CONVEXE ŞI CONCAVE

Mulţime convexă. O mulţime de puncte X se numeşte convexă dacă pentru oricare două puncte x_1, x_2 care aparţin mulţimii X este satisfăcută condiţia

$$x = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1 \subset X \text{ pentru orice } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \quad \text{(VI.2.1)}$$

Geometric, condiţia (VI.2.1) arată că toate punctele segmentului care uneşte două puncte ale mulţimii aparţin mulţimii.

O mulţime convexă este *închisă* dacă îşi conţine toate punctele frontieră. Un punct x aparţinînd unei mulţimi convexe este un punct extrem dacă şi numai dacă nu există două puncte diferite x_1, x_2 aparţinînd mulţimii, astfel ca $x = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1$; $0 < \lambda < 1$. Orice punct extrem este un punct frontieră. Reciproca acestei afirmaţii nu este adevărată. Se demonstrează cu uşurinţă că intersecţia a două mulţimi convexe este o mulţime convexă.

Exemple. Hiperplanul $\sum_j a_j x_j = b$ este o mulţime convexă, de asemenea şi semispaţiile $\sum_j a_j x_j > b$; $\sum_j a_j x_j < b$. Regiunea definită de inecuaţiile liniare $\pm \sum_j a_{ij} x_j \geqslant b_i$; $i = 1, \ldots, m$ este o regiune convexă închisă.

Funcţie convexă. O funcţie $f(x)$ se numeşte funcţie convexă pe o mulţime convexă $X \subset R^n$ dacă pentru oricare două puncte x_1 şi x_2 care aparţin mulţimii X este satisfăcută condiţia

$$f[\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1] \leqslant \lambda f(x_2) + (1 - \lambda) f(x_1) \text{ pentru orice } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \quad \text{(VI.2.2)}$$

Funcţie strict convexă. Funcţia $f(x)$ se numeşte strict convexă pe o mulţime convexă $X \subset R^n$ dacă restricţia (VI.2.2) este satisfăcută

Scanned with OKEN Scanner

numai cu semnul $<$ pentru oricare două puncte $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ şi orice $0 < \lambda < 1$.

Funcţie concavă. Funcţia $f(x)$ se numeşte concavă pe mulţimea convexă $X \subset R^n$ dacă pentru oricare două puncte x_1 şi x_2 care aparţin mulţimii X este satisfăcută condiţia

$$f[\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1] \geqslant \lambda f(x_2) + (1 - \lambda) f(x_1) \text{ pentru orice } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \qquad \text{(VI.2.3)}$$

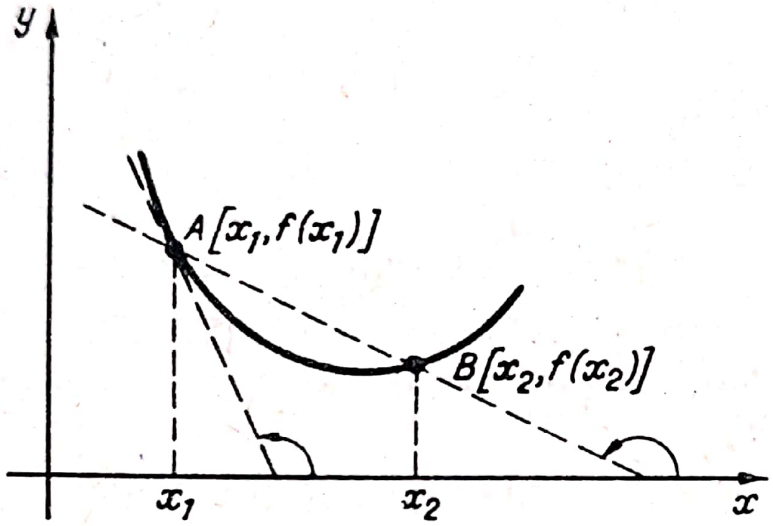


Fig. 26

Funcţie strict concavă. Funcţia $f(x)$ se numeşte strict concavă pe o mulţime convexă $X \subset R^n$ dacă restricţia (VI.2.3) este satisfăcută numai cu semnul $>$, pentru oricare două puncte $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ şi orice $0 < \lambda < 1$.

Intuitiv, o funcţie diferenţiabilă $f(x)$ în spaţiul bidimensional este convexă dacă panta tangentei la graficul funcţiei într-un punct x_1 este mai mică decît panta coardei care uneşte punctul $[x_1, f(x_1)]$ cu orice alt punct $[x_2, f(x_2)]$ al graficului, adică dacă

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad \text{(VI.2.4)}$$

Vom arăta că relaţia (VI.2.4) rămîne adevărată pentru o funcţie convexă şi diferenţiabilă pe mulţimea $x \subset R^n$, adică

$$(x_2 - x_1) \nabla f(x_1) \leqslant f(x_2) - f(x_1), \qquad \text{(VI.2.5)}$$

unde $\nabla f(x_1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{11}}, \frac{\partial f}{\partial x_{12}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{1n}}\right)$ este gradientul funcţiei f în x_1.

În adevăr, $f(x)$ fiind convexă, avem

$$f[\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1] \leqslant \lambda f(x_2) + (1 - \lambda)f(x_1) \text{ pentru } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

sau relaţia echivalentă

$$f[x_1 + \lambda(x_2 - x_1)] - f(x_1) \leqslant \lambda[f(x_2) - f(x_1)]. \qquad \text{(VI.2.6)}$$

Înlocuind în inegalitatea (VI.2.6) funcţia $f[x_1 + \lambda(x_2 - x_1)]$ prin dezvoltarea ei în serie Taylor, avem

$$f(x_1) + \lambda(x_2 - x_1)\nabla f[x_1 + \theta\lambda(x_2 - x_1)] - f(x_1) \leqslant \lambda[f(x_2) - f(x_1)] \qquad \text{(VI.2.7)}$$

pentru $0 \leqslant 0 \leqslant 1$.

Reducînd termenii $f(x_1)$, relaţia (VI.2.7) se poate simplifica cu $\lambda > 0$ şi avem

$$(x_2 - x_1)\nabla f[x_1 + \theta\lambda(x_2 - x_1)] \leqslant f(x_2) - f(x_1). \qquad \text{(VI.2.8)}$$

Pentru $\lambda = 0$ relaţia (VI.2.8) se reduce la (VI.2.5).

Dacă $f(x)$ este concavă şi diferenţiabilă pe o mulţime convexă $x \subset R^n$, atunci

$$(x_2 - x_1)\nabla f(x_1) \geqslant f(x_2) - f(x_1). \qquad \text{(VI.2.9)}$$

Teorema 1. Suma unui număr finit de funcţii convexe (concave) pe o mulţime convexă $X \subset R^n$ este o funcţia convexă (concavă) pe mulţimea X.

Demonstraţie. Fie $g_i(x)$; $(i = 1, \ldots, m)$ m funcţii convexe pe o mulţime $X \subset R^n$. Funcţia

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x)$$

este de asemenea convexă pe mulţimea X, deoarece pentru oricare două puncte x_1, x_2 aparţinînd mulţimii X şi orice $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ avem

$$g[\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1] = \sum_{i=1}^{m} g_i[\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1] \leqslant \sum_{i=1}^{m} [\lambda g_i(x_2) + (1 -$$

$$- \lambda)g_i(x_1)] = \lambda \sum_{i=1}^{m} g_i(x_2) + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{m} g_i(x_1) = \lambda g(x_2) + (1 - \lambda)g(x_1).$$

Extremele funcţiilor convexe şi concave

Teorema 2. Minimul relativ al unei funcţii convexe $f(x)$ pe o mulţime convexă închisă $X \subset R^n$ este minimul absolut al funcţiei $f(x)$ pe toată mulţimea X.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie $x_0 \in X$ un punct în care $f(x)$ are un minim relativ. Dacă x^* ar fi un punct în care $f(x)$ ar avea minimul absolut pe toată mulțimea X, atunci

$$f(x^*) < f(x_0). \qquad \text{(VI.2.10)}$$

Să considerăm punctele $x = \lambda x^* + (1 - \lambda)x_0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Funcția $f(x)$ fiind convexă, îndeplinește condiția

$$f[\lambda x^* + (1 - \lambda)x_0] \leqslant \lambda f(x^*) + (1 - \lambda)f(x_0) \qquad \text{(VII.2.11)}$$

sau, ținînd seama de inegalitatea (VI.2.10),

$$f[\lambda x^* + (1 - \lambda)x_0] < \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x_0) = f(x_0). \qquad \text{(VI.2.12)}$$

Pe de altă parte, x_0 fiind un punct de minim relativ există o vecinătate V_ε a punctului x_0 astfel încît $f(x_0)$ să fie mai mic decît toate valorile pe care le ia funcția pe mulțimea V_ε. Luînd

$$|x - x_0| < \varepsilon,$$

deci

$$|\lambda x^* + (1 - \lambda)x_0 - x_0| < \varepsilon$$

sau

$$|\lambda| \, |x^* - x_0| < \varepsilon,$$

rezultă că pentru toate punctele $\bar{x} = \lambda x^* + (1 - \lambda)x_0$ pentru care

$$0 < \lambda < \frac{\varepsilon}{|x^* - x|}$$

este satisfăcută condiția

$$f(\bar{x}) < f(x_0), \qquad \text{(VI.2.13)}$$

deci în orice vecinătate a punctului x_0 de rază $\varepsilon < |x^* - x_0|$ există puncte $\bar{x}$ în care $f(x)$ ia valori mai mici decît în x_0, ceea ce contrazice ipoteza că x_0 este un punct de minim relativ dacă $x_0 \neq x^*$.

Teorema 3. Mulțimea punctelor în care o funcție convexă $f(x)$ ia valoarea minimă globală pe mulțimea convexă X este o mulțime convexă.

Demonstrație. Să admitem că $f(x)$ ia valoarea minimă globală m pe mulțimea convexă X în două puncte x_1 și x_2 aparținînd acestei mulțimi. Funcția va lua aceeași valoare în orice punct $\bar{x} = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1$ cu $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. În adevăr, funcția fiind convexă avem

$$f(x) = f[\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1] \leqslant \lambda f(x_2) + (1 - \lambda)f(x_1),$$

Scanned with OKEN Scanner

dar

$$f(x_2) = f(x_1) = m,$$

deci

$$f(x) \leqslant m.$$

Deoarece $f(x)$ nu poate fi mai mic decît m, rezultă că

$$f(x) = m,$$

deci mulțimea punctelor în care $f(x)$ ia valoarea minimă este convexă Din această teoremă rezultă:

Corolarul 1. Dacă o funcție convexă $f(x)$ ia valoarea minimă globală în două puncte diferite ale mulțimii X, funcția respectivă ia aceeași valoare într-o infinitate de puncte.

Corolarul 2. O funcție strict convexă are un minim absolut pe o mulțime convexă $X \subset R^n$ într-un singur punct. În cele ce urmează se va vedea că acest rezultat este deosebit de important în rezolvarea problemelor de programare pătratică.

În mod analog se demonstrează:

Teorema 4. Maximul relativ al unei funcții concave $f(x)$ pe o mulțime convexă închisă $X \subset R^n$ este maximul absolut al funcției $f(x)$ pe toată mulțimea X.

Teorema 5. Mulțimea punctelor în care o funcție concavă $f(x)$ ia valoarea maximă globală pe mulțimea convexă X este o mulțime convexă.

Corolarul 3. Dacă o funcție concavă $f(x)$ ia valoarea maximă globală în două puncte diferite ale mulțimii X, funcția $f(x)$ ia aceeași valoare într-o infinitate de puncte.

Corolarul 4. O funcție strict concavă are un maxim absolut pe o mulțime convexă X într-un singur punct.

§ 3. FORME PĂTRATICE

Definiție. O sumă de monoame de gradul al doilea în raport cu n variabile $x_1 x_2, \ldots, x_n$ se numește formă pătratică de aceste variabile.

Funcția

$$f(x_1 x_2 \ldots . x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_i\, x_j\,; \text{ unde } c_{ij} = c_{ji}, \qquad \text{(VI.3.1)}$$

este o formă patratică de variabilele $x_1, \ldots, x_n$.

Scanned with OKEN Scanner

Notînd cu x vectorul-coloană cu componentele $x_1, \ldots, x_n$ și cu C matricea simetrică n — dimensională cu elementele c_{ij}, forma patratică se scrie

$$f(x) = x'Cx, \tag{VI.3.2}$$

unde x' este transpusul vectorului x.

Este ușor de arătat că dacă $x'Cx = 0$ pentru orice vector x, matricea C este matricea nulă.

Rangul p al matricei C se numește *rangul formei pătratice*. O formă pătratică este *nedegenerată* dacă $r(C) = n$; forma este degenerată dacă matricea C este singulară, adică $r(C) < n$.

Transformata unei forme pătratice printr-o substituție liniară Fie dată forma pătratică nedegenerată

$$f(x) = x'Cx$$

și substituția liniară

$$x = By.$$

Transformata funcției $f(x)$ prin această substituție liniară este

$$f(y) = (By)'C(By) = y'(B'CB)y.$$

Pentru a dovedi că funcția $f(y)$ este tot o formă pătratică trebuie arătat că matricea $(B'CB)$ este simetrică. În adevăr, transpusa acestei matrice este

$$(B'CB)' = (CB)'(B')' = B'C'B.$$

Deoarece matricea C este simetrică $C' = C$ și

$$(B'CB)' = B'CB,$$

ceea ce dovedește că transformata unei forme pătratice printr-o substituție liniară este tot o formă pătratică. Mai mult, dacă $f(x)$ este nedegenerată, și $f(y)$ este nedegenerată, cu condiția ca matricea transformării liniare să fie nesingulară. Această afirmație se dovedește calculînd discriminantul formei pătratice $f(y)$. Avem

$$|B'CB| = |B'|\,|C|\,|B| = |C|\,|B|^2,$$

deci dacă $|C| \neq 0$ și $|B| \neq 0$ urmează că $|B'CB| \neq 0$.

Valori caracteristice și vectori caracteristici ai unei matrice simetrice. Scalarii λ și vectorii x nenuli care satisfac ecuația

$$Cx = \alpha x \tag{VI.3.3}$$

se numesc valori caracteristice sau valori proprii, respectiv vectori caracteristici sau vectori proprii a matricei C.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația (VI.3.3) se poate scrie sub forma

$$(C - \alpha E)x = 0, \tag{VI.3.4}$$

unde s-a notat cu E matricea unitate de ordinul n, dacă C este $n \times n$ — dimensională. Sub această formă este evident că ecuația (VI.3.4) nu poate fi satisfăcută de un vector $x \neq 0$, decît dacă matricea este singulară, adică

$$|C - \alpha E| = 0. \tag{VI.3.5}$$

Relația (VI.3.5), denumită *„ecuație secular㔓*, este o ecuație de gradul n în α. Rădăcinile ecuației seculare sînt *valorile caracteristice* ale matricei C.

Se pot demonstra următoarele:

Teorema 1. Valorile caracteristice ale unei matrice simetrice reale sînt reale [20].

Teorema 2. Vectorii caracteristici corespunzători diferitelor valori caracteristice sînt ortogonali [20].

Teorema 3. Orice matrice simetrică reală de ordinul n are n vectori caracteristici mutual ortogonali, fie că ecuația secular㠄 admite numai rădăcini simple, fie că admite și rădăcini multiple.

Dacă se notează cu $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ vectorii caracteristici, prin normalizarea acestor vectori se obțin vectorii caracteristici $u_1, \ldots, u_n$, care avînd norma egală cu unitatea și fiind mutual ortogonali formează o bază ortonormală în spațiul n — dimensional R^n, deci $u_i' u_j = \delta_{ij}$, unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker.

Teorema 4. Orice matrice simetrică C este congruentă cu o matrice diagonală ale cărei elemente sînt valorile caracteristice ale matricei.

Demonstrație. Fie $Q = (u_1, \ldots, u_n)$ matricea formată din vectorii caracteristici ortonormali ai matricei C. Atunci

$$Q'Q = E. \tag{VI.3.6}$$

Înmulțind la dreapta această egalitate cu Q^{-1}, avem

$$Q' = Q^{-1}. \tag{VI.3.7}$$

Calculînd produsul $Q'CQ$ avem

$$Q^{-1}CQ = Q'CQ = Q'(Cu_1, \ldots, Cu_n) = Q'(\alpha_1 u_1, \ldots, \alpha_n u_n), \tag{VI.3.8}$$

de unde rezultă că

$$Q'CQ = ||\alpha_j \delta_{ij}||.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ca o concluzie imediată a acestei teoreme apare următorul:

Corolar. O formă pătratică nedegenerată $f(x) = x'Cx$ se poate transforma într-o sumă de n pătrate de forme liniare, liniar independente.

În adevăr, prin substituția

$$x = Qy,$$

în care Q este matricea definită anterior, forma pătratică $f(x)$ devine

$$f(y) = (Qy)'\, C\, (Qy) = y'(Q'CQ)y$$

și, ținînd seama de (VI.3.8), avem

$$f(y) = y' \,||\alpha_j \delta_{ij}||\, y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i y_j^2. \tag{VI.3.9}$$

Forma pătratică scrisă ca o sumă de pătrate se numește *forma canonică* a formei pătratice. Legea de inerție a formelor pătratice, demonstrată de J. Sylvester, dovedește că oricare ar fi modul de reducere a unei forme pătratice la forma canonică, numărul pătratelor cu coeficienți pozitivi și numărul pătratelor cu coeficienți negativi rămîne același.

Formă pătratică definită. O formă pătratică $x'Cx$ este *definită pozitiv* dacă pentru orice vector $x \neq 0$

$$x'Cx > 0; \tag{VI.3.10}$$

forma este *definită negativ* dacă pentru orice vector $x \neq 0$

$$x'Cx < 0. \tag{VI.3.11}$$

Formă pătratică semidefinită. O formă pătratică $x'Cx$ este *semidefinită pozitiv* dacă

$$x'Cx \geqslant 0 \tag{VI.3.12}$$

și dacă există $x \neq 0$ pentru care

$$x'Cx = 0. \tag{VI.3.13}$$

Forma este *semidefinită negativ* dacă

$$x'Cx \leqslant 0 \tag{VI.3.14}$$

și dacă există $x \neq 0$ pentru care

$$x'Cx = 0. \tag{VI.3.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Formă pătratică nedefinită. O formă pătratică este nedefinită dacă pentru unii vectori este pozitivă şi pentru alţii negativă.

S-a arătat anterior că o formă pătratică nedegenerată $f(x) = x'Cx$ poate fi scrisă

$$f(x) = x'Cx = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j^2,$$

unde y_j sînt funcţii liniare de componentele vectorului x şi α_j sînt valorile caracteristice ale matricei C. De aici se deduce că:

— o formă pătratică este *definită* dacă şi numai dacă toate valorile caracteristice ale matricei C sînt de acelaşi semn;

— o formă pătratică este *semidefinită* dacă matricea C are cel puţin o valoare caracteristică nulă şi toate celelalte de acelaşi semn;

— o formă pătratică este *nedefinită* dacă şi numai dacă matricea C are şi valori caracteristice pozitive şi negative.

Matrice definite şi matrice semidefinite. O matrice este definită dacă toate valorile ei caracteristice sînt de acelaşi semn, iar matricea este semidefinită dacă are şi valori caracteristice pozitive şi negative.

Teorema 5. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca o matrice nedegenerată C să fie definită pozitiv este ca toţi minorii principali ai matricei să fie pozitivi.

Demonstraţie. Fie $f(x) = x'Cx$ o formă pătratică de matrice C. Să admitem că $f(x)$ este pozitiv definită, deci se poate scrie

$$f(x) = x'Cx = \sum_{j} \alpha_j y_j^2,$$

unde $\alpha_j > 0$ pentru orice j. Prin metoda lui Jacobi de reducere a unei forme pătratice la forma canonică, avem

$$f(x) = x'Cx = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \xi_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \xi_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \xi_n^2.$$

Legea de inerţie a formelor pătratice ne îngăduie să afirmăm că dacă $\alpha_j > 0$, atunci şi $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\ldots$ $\Delta_n > 0$. Reciproca teoremei este evidentă. De aici se deduce cu uşurinţă următorul:

Corolar. Numărul valorilor caracteristice negative ale unei matrice nedegenerate este egal cu numărul variaţiilor de semn din şirul minorilor principali ai matricei.

Teorema 6. Dacă o matrice nedegenerată C este pozitiv definită, matricea inversă C^{-1} este pozitiv definită.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Se știe că pentru orice matrice nedegenerată C, se poate găsi o matrice Q cu proprietatea $Q' = Q^{-1}$, astfel ca

$$Q'CQ = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Dacă matricea C este pozitiv definită, atunci $\alpha_j > 0$ pentru toți $j = 1, \dots, n$. Inversa acestei matrice este

$$(Q'CQ^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix},$$

deci tot o matrice pozitiv definită. Pe de altă parte,

$$(Q'CQ)^{-1} = Q^{-1}[Q'C]^{-1} = Q^{-1}C^{-1}(Q')^{-1} = Q'C^{-1}Q,$$

adică matricea $Q'C^{-1}Q$ este pozitiv definită deci și matricea C^{-1} are această proprietate.

Teorema 7. O formă pătratică semidefinită pozitiv este o funcție convexă pentru orice vector x din spațiul n-dimensional R_n.

Demonstrație. Fie $f(x) = x'Cx$ o formă pătratică, x_1, x_2 doi vector în R^n și λ un scalar oarecare cu valori $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Fie $\bar{x}$ vectorul

$$\bar{x} = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1.$$

Calculînd $f(\bar{x})$ găsim

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \bar{x}'C\bar{x} = [\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1]'C[\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1] = \\ &= [x_1 + \lambda(x_2 - x_1)]'C \cdot [x_1 + \lambda(x_2 - x_1)] = \\ &= x_1'Cx_1 + 2\lambda(x_2 - x_1)'Cx_1 + \lambda^2(x_2 - x_1)'C(x_2 - x_1). \end{aligned} \qquad \text{(VI.3.16)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Forma $f(x)$ fiind prin ipoteză semidefinită pozitiv, pentru orice x avem

$$x'Cx \geqslant 0 \tag{VI.3.17}$$

şi deoarece $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, pentru orice x avem

$$\lambda x'Cx \geqslant \lambda^2 x'Cx, \tag{VI.3.18}$$

deci relaţia (VI.3.16) devine

$$\bar{x}^1 C\bar{x} \leqslant x_1'Cx_1 + 2\lambda(x_2 - x_1)'Cx_1 + \lambda(x_2 - x_1)'C(x_2 - x_1)$$

care se mai poate scrie

$$\bar{x}'C\bar{x} \leqslant x_1'Cx_1 + \lambda(x_2'Cx_2 - x_1'Cx_1)$$

sau

$$\bar{x}'C\bar{x} \leqslant \lambda x'_2Cx_2 + (1 - \lambda)x'_1Cx_1. \tag{VI.3.19}$$

Inegalitatea (VI.3.19) caracterizează o funcţie convexă, deci teorema este demonstrată.

Analog se demonstrează:

Teorema 8. O formă pătratică definită negativ este o funcţie concavă pentru orice vector x din spaţiul R^n.

Teorema 9. O formă pătratică definită pozitiv este o funcţie strict convexă pentru orice vector x din spaţiul R^n.

Demonstraţia este aceeaşi ca pentru teorema 7, cu deosebire că semnul $\leqslant$ se înlocuieşte cu semnul $<$, deci rezultă că

$$\bar{x}'C\bar{x} < \lambda x'_2Cx_2 + (1 - \lambda)x'_1Cx_1. \tag{VI.3.20}$$

Asemănător se dovedeşte:

Teorema 10. O formă pătratică definită negativ este o funcţie strict concavă pentru orice vector x din spaţiul R^n.

Teorema 11. Pentru o formă semidefinită relaţia

$$x'Cx = 0 \Rightarrow Cx = 0. \tag{VI.3.21}$$

Demonstraţie. Să admitem că $f(x) = x'Cx$ este semidefinită pozitiv şi că pentru $\bar{x}$ avem

$$\bar{x}'C\bar{x} = 0.$$

Fie y un vector oarecare în R^n şi t un număr arbitrar. Pentru vectorul $x = y + t\bar{x}$ avem

$$(y + t\bar{x})'C(y + t\bar{x}) \geqslant 0, \tag{VI.3.22}$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece $f(x)$ este semidefinită pozitiv. Dezvoltînd membrul stîng al acestei inegalităţi, avem

$$y'Cy + 2t\bar{x}'Cy + t^2\bar{x}'C\bar{x} \geqslant 0 \qquad \text{(VI.3.23)}$$

sau avînd în vedere că $\bar{x}'C\bar{x} = 0$ şi $\bar{x}'Cy = y'C\bar{x}$, relaţia (VI.3.23) se mai poate scrie

$$y'Cy + 2ty'C\bar{x} \geqslant 0. \qquad \text{(VI.3.24)}$$

Inegalitatea (VI.3.24) este adevărată pentru orice t şi y numai dacă

$$C\bar{x} = 0.$$

Dacă forma $f(x)$ este semidefinită negativ demonstraţia îşi păstrează valabilitatea şi semnul $\geqslant$ din relaţia (VI.3.24) se înlocuieşte prin $\leqslant$.

§ 4. TEOREMA KUHN-TUCKER

Teorema Kuhn—Tucker stabileşte condiţiile necesare şi suficiente pentru ca o soluţie realizabilă a unei probleme de programare neliniară să fie un optim local.

Fie dată următoarea problemă: să se determine maximul funcţiei

$$z = f(x). \qquad \text{(VI.4.1)}$$

vectorul $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fiind obligat să satisfacă restricţiile

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad \text{(VI.4.2)}$$

$$x \geqslant 0. \qquad \text{(VI.4.3)}$$

Se presupune că funcţia $f(x)$ este continuă şi derivabilă pentru orice $x \geqslant 0$.

Fie x^* o soluţie realizabilă a sistemului de restricţii pentru care funcţia z admite un maxim local, adică pentru δx suficient de mic:

$$f(x^* + \delta x) \leqslant f(x^*).$$

Variaţia funcţiei $f(x)$ este

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}\, \delta x_j$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă neglijăm derivatele de ordin superior. x^* este un optim local dacă $df \leqslant 0$, adică

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} \delta x_j \leqslant 0. \qquad \text{(VI.4.4)}$$

Vectorul $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ poate avea componente nule şi pozitive. Să admitem că

$$x_j^* = 0 \quad \text{pentru toţi } j \in J_1 = \{1, 2, \ldots, n_1\},$$
$$x_j^* > 0 \quad \text{pentru toţi } j \in J_2 = \{n_1 + 1, \ldots, n\}.$$

Atunci vectorul $x^* + \delta x$ este o soluţie realizabilă dacă:

$$\delta x_j \geqslant 0 \text{ pentru toţi } j \in J_1. \qquad \text{(VI.4.5)}$$

Admitem de asemenea că x^* satisface unele restricţii din sistemul (VI.4.2) cu semnul $=$ şi pe celelalte cu semnul $<$. Fie

$$\sum_j a_{ij} x_j^* = b_i \text{ pentru toţi } i \in I_1 = \{1, 2, \ldots, m_1\},$$

$$\sum_j a_{ij} x_j^* < b_i \text{ pentru toţi } i \in I_2 = \{m_1 + 1, \ldots, m\}.$$

Atunci vectorul $x^* + \delta x$ este o soluţie a sistemului (VI.4.2) dacă:

$$\sum_j a_{ij} \delta x_j \leqslant 0 \text{ pentru toţi } i \in I_1. \qquad \text{(VI.4.6)}$$

Lema Minkowsky-Farkas dovedeşte că: avînd m inegalităţi liniare şi omogene în n variabile:

$$I_k = \sum_j a_{ij} x_j \leqslant 0 \qquad k = 1, \ldots, m,$$

acestea implică inegalitatea liniară şi omogenă

$$I_0 = \sum_j a_{0j} x_j \leqslant 0,$$

dacă şi numai dacă I_0 este o combinaţie liniară pozitivă a formelor I_k adică există m numere nenegative u_k, astfel încît

$$I_0 = \sum_{k=1}^{m} u_k I_k.$$

Scanned with OKEN Scanner

În problema de care ne ocupăm, inegalitățile liniare și omogene

$$-\delta x_j \leqslant 0; \quad j = 1, \ldots, n_1,$$

$$\sum_j a_{ij} \delta x_j \leqslant 0; \quad i = 1, \ldots, m_1$$

implică inegalitatea liniară și omogenă

$$\sum \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} \delta x_j \leqslant 0.$$

Deci, trebuie să existe $n_1 + m_1$ numere nenegative pe care le notăm cu $v_1, \ldots, v_{n_1}$; $u_1, \ldots, u_{m_1}$, încît se poate scrie

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} \delta x_j = \sum_{i=1}^{m_1} u_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta x_j - \sum_{j=1}^{n_1} v_j \delta x_j.$$

Această egalitate poate fi scrisă sub o formă mai convenabilă schimbînd ordinea de însumare în primul termen din membrul drept și trecîndu-l în membrul stîng. Astfel avem:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m_1} u_i a_{ij} \right) \delta x_j = - \sum_{j=1}^{n_1} v_j \delta x_j.$$

Suma din paranteză se poate extinde pe toată mulțimea indicilor $i = 1, \ldots, m$ dacă se iau $u_i = 0$ pentru $i = m_1 + 1, \ldots, m$. Astfel se poate scrie

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \right) \delta x_j = - \sum_{j=1}^{n_1} v_j \delta x_j. \qquad \text{(VI.4.7)}$$

Deoarece $v_j \geqslant 0$ și $\delta x_j \geqslant 0$ pentru toți $j \in J_1$, avem

$$\sum_{j=1}^{n_1} v_j \, \delta x_j \geqslant 0$$

și deci egalitatea de mai sus conduce la relația

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i \, a_{ij} \right) \delta x_j \leqslant 0. \qquad \text{(VI.4.8)}$$

Să presupunem acum că $\delta x_j \neq 0$ pentru un singur $j = 1, \ldots, n$. Se pot prezenta două cazuri:

a) $j \in J_1$ și atunci $\delta x_j > 0$.

o) $j \in J_2$ și δx_j nu au restricții de semn.

Scanned with OKEN Scanner

În primul caz suma din membrul stîng al egalității (VI.4.7) se reduce la un singuer termen, iar $v_j \delta x_j \geqslant 0$, deci

I) $$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \leqslant 0. \qquad \text{(VI.4.9)}$$

Această condiție este satisfăcută pentru toți x_j de indice $j \in J_1$. În cazul al doilea $\sum_{j=1}^{n_1} v_j \delta x_j = 0$, deoarece $\delta x_j \neq 0$ pentru $j > n_1$, iar suma din membrul stîng al egalității (VI.4.7) se reduce tot la un singur termen, încît avem

$$\left[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}\right] \delta x_j = 0.$$

Deoarece $\delta x_j \neq 0$ produsul se anulează dacă și numai dacă

II) $$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} = 0. \qquad \text{(VI.4.10)}$$

Egalitatea se păstrează pentru toți x_j de indice $j \in J_2$.

Din cele expuse rezultă că dacă x^* este un optim local pentru funcția $f(x)$, există un vector nenegativ $u = (u_1, \ldots, u_m)$ astfel încît să fie satisfăcute condițiile I și II, denumite *condițiile Kuhn—Tucker*.

Dacă relațiile (VI.4.9) se înmulțesc cu x_j^*, produsele obținute sînt nule, deoarece $x_j^* = 0$ pentru toți $j \in J_1$; de asemenea relația (VI.4.10) înmulțită cu x_j^* dă produse nule, deci se poate scrie

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}\right) = 0. \qquad \text{(VI.4.11)}$$

Pentru problema de programare liniară cu obiectivul max $f(x) = cx$, condițiile Kuhn—Tucker sînt:

(I′) $c_j \leqslant u_1 a_{1j} + u_2 a_{2j} + \ldots + u_n a_{nj}$ pentru $x_j^* = 0$, adică pentru toți vectorii j care nu aparțin bazei optime;

(II′) $c_j = u_1 a_{1j} + u_2 a_{2j} + \ldots + u_n a_{nj}$ pentru $x_j^* > 0$, adică pentru toți vectorii j care aparțin bazei optime.

Expresia condițiilor Kuhn—Tucker pentru cazul particular al funcției liniare va înlesni o interpretare economică a vectorului u. În primul rînd, însă, trebuie demonstrat că x^* este un optim local dacă sînt îndeplinite condițiile Kuhn—Tucker.

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, fie $\bar{x}$ o soluție realizabilă a sistemului de restricții astfel încît $|\bar{x} - x^*| < \varepsilon$. Atunci variația funcției $f(x)$ este

$$df = f(\bar{x}) - f(x^*) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} (\bar{x}_j - x_j^*). \qquad \text{(VI.4.12)}$$

Deoarece pentru x^* există un vector nenegativ u astfel încît să fie îndeplinite condițiile Kuhn—Tucker (I și II), rezultă că

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} \leqslant \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \quad \text{pentru toți } j = 1, \ldots, n. \qquad \text{(VI.4.13)}$$

Fiindcă toți x_j^* sînt nenegativi se pot înmulți ambii membri ai inegalității (VI.4.13) cu x_j^* și însumînd pentru $j = 1, \ldots, n$ avem:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_j^* \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}, \qquad \text{(VI.4.14)}$$

deci egalitatea (VI.4.12) se transformă în inegalitatea

$$df \leqslant \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} x_j^* \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}. \qquad \text{(VI.4.15)}$$

De asemenea $\bar{x}_j$ sînt nenegativi, deci înmulțind relația (VI.4.13) cu $\bar{x}_j$ și însumînd avem

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}. \qquad \text{(VI.4.16)}$$

Adunînd inegalitățile (VI.4.15) și (VI.4.16) găsim

$$df \leqslant \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_j^* \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}$$

sau schimbînd ordinea de însumare

$$df \leqslant \sum_{i=1}^{m} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right)$$

sau descompunînd suma relativă la indicele i

$$df \leqslant \sum_{i=1}^{m_1} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) + \sum_{i=m_1+1}^{i=m} u_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right). \qquad \text{(VI.4.17)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se știe că $u_i = 0$ pentru $i = m_1 + 1, \ldots, m$, deci al doilea termen din membrul stîng al relației (VI.4.17) este nul. Pe de altă parte, toate restricțiile de indice $i = 1, \ldots, m_1$ sînt satisfăcute de soluția x^* cu semnul $=$, adică

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i; \quad i = 1, \ldots, m_1. \tag{VI.4.18}$$

Deoarece $\bar{x}$ este o soluție realizabilă, primele m_1 restricții ale sistemului sînt satisfăcute, deci

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j \leqslant b_i. \tag{VI.4.19}$$

Din relațiile (VI.4.18) și (VI.4.19) se deduce

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*$$

sau

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \leqslant 0. \tag{VI.4.20}$$

Deoarece $u_j \geqslant 0$ pentru $i = 1, \ldots, m_1$, din relația (VI.4.17), în care se ține seamă de inegalitatea (VI.4.20), rezultă

$$df \leqslant 0 \quad \text{sau} \quad f(\bar{x}) \leqslant f(x^*),$$

ceea ce dovedește că x^* este un optim local. Astfel s-a demonstrat că este necesar și suficient să fie îndeplinite condițiile Kuhn—Tucker pentru ca x^* să fie un punct maxim local pentru funcția $f(x)$ pe mulțimea soluțiilor nenegative ale sistemului de restricții $Ax \leqslant b$.

Dacă funcția obiectiv $z = f(x)$ este concavă, maximul local (relativ) este maximul absolut al funcției pe toată mulțimea soluțiilor realizabile ale sistemului $Ax \leqslant b$, dacă această mulțime este închisă (v. § 2, teorema 4).

Interpretarea economică a vectorului u. Vectorul $u = (u_1, \ldots, u_m)$ a fost definit astfel: $u_i \geqslant 0$ pentru toți indicii $i \in I_1$, adică pentru toate restricțiile sistemului (VI.4.2) verificate de soluția optimă cu semnul $=$. Din punct de vedere economic, aceste restricții arată că resursele b_i; $i \in I_1$ sînt integral folosite în programul optim de producție. $u_i = 0$ pentru toți indicii $i \in I_2$, adică pentru toate restricțiile sistemului (VI.4.2) verificate de soluția optimă cu semnul $<$. Din punct de vedere economic, aceste restricții arată că resursele b_i;

$i \in I_2$ nu sînt integral folosite în programul optim. Pe de altă parte, $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ exprimă modificarea valorii funcţiei obiectiv cînd activitatea j variază cu $\delta x_j = 1$. Dacă funcţia obiectiv este expresia beneficiului care se obţine pentru un anumit program de activitate, atunci $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ reprezintă beneficiul parţial produs de activitatea j, adică beneficiul obţinut cînd programul se rezumă la o singură activitate.

Condiţiile I şi II ne îndreptăţesc să considerăm vectorul u ca un vector al preţurilor şi astfel $\sum_i u_i a_{ij}$ reprezintă costul de producţie al unei unităţi din produsul j. Cu această interpretare teorema Kuhn—Tucker se poate enunţa astfel:

x^* este un program care asigură beneficiul maxim în condiţiile tehnico-economice de producţie, dacă există un sistem de preţuri nenegative $u = (u_1, \ldots, u_m)$ astfel încît:

a) costul de producţie al unei unităţi din fiecare activitate, care în programul optim se desfăşoară la nivel nul, să fie cel puţin egal cu beneficiul parţial pe care îl poate aduce această activitate (condiţia I);

b) costul de producţie al unei unităţi din fiecare activitate, care în programul optim se desfăşoară la nivel nenul, să fie egal cu beneficiul parţial adus de această activitate (condiţia II);

c) preţurile u_i asociate tuturor resurselor b_i care nu sînt integral folosite în programul optim sînt nule ($u_i = 0$ pentru toţi $i \in I_2$). Această interpretare economică a teoremei Kuhn—Tucker apare mai evidentă pentru condiţiile (I') şi (II'), care dealtfel reproduc fidel criteriile de optimalitate a unei soluţii în metoda simplex pentru o problemă de maxim.

Teorema Kuhn—Tucker se poate demonstra şi pentru cazul general al problemelor de programare neliniară, caz în care şi funcţiile care alcătuiesc sistemul de restricţii sînt neliniare. În cele ce urmează se vor stabili aceste condiţii tot pentru un caz particular al problemelor de programare neliniară, şi anume pentru problemele de programare pătratică, în forma modificată sub care sînt date de E.W. Barankin şi R.Dorfman [6].

Problema este următoarea: să se determine maximul funcţiei

$$f(x) = -\sum_{j=1}^{n} p_j x_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j, \qquad \text{(VI.4.21)}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $C = (c_{ij})$ este semidefinită pozitiv, cu condițiile

$$g_i(x) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant 0; \quad i = 1, \ldots, m \tag{VI.4.22}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad j = 1, \ldots, n. \tag{VI.4.23}$$

Aceeași problemă se scrie sub formă matricială astfel: să se determine vectorul x care maximizează funcția

$$f(x) = -px - \frac{1}{2} x'Cx, \tag{VI.4.24}$$

cu condițiile

$$Ax \leqslant b,$$
$$x \geqslant 0 \tag{VI.4.25}$$

Problema (VI.4.21)—(VI.4.23) sau (VI.4.24)—(VI.4.25) va fi denumită $P(C, p, A, b)$. Se admite că problema $P(C, p, A, b)$ are o soluție optimă și se definește vectorul $u=(u_1, \ldots, u_m)$ cu ajutorul căruia se construiește funcția

$$F(x, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x) = -px - \frac{1}{2} x'Cx + u(b - Ax). \tag{VI.4.26}$$

Teorema Kuhn—Tucker afirmă că x^* este o soluție a problemei $P(C, p, A, b)$ dacă și numai dacă există vectorul $u^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*)$ astfel ca

$$\frac{\partial F(x^*, u^*)}{\partial x_j} \leqslant 0; \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \text{(VI.4.27)} \Leftarrow \text{(VI.4.9)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(x^*, u^*)}{\partial x_j} x_j^* = 0, \qquad \text{(VI.4.28)} \Leftarrow \text{(VI.4.11)}$$

$$\frac{\partial F(x^*, u^*)}{\partial u_i} \geqslant 0; \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \text{(VI.4.29)} \Leftarrow \text{(VI.4,2)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F(x^*, u^*)}{\partial u_i} u_i^* = 0, \qquad \text{(VI.4.30)} \Leftarrow \begin{cases} u_i \neq 0 & i \in I_1 \\ u_i = 0 & i \in I_2 \end{cases}$$

$$x_j^* \geqslant 0; \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \text{(VI.4.31)}$$

$$u_k^* \geqslant 0; \quad k = 1, \ldots, m. \qquad \text{(VI.4.31)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţia (VI.4.26) avem

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -p_i - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j - \sum_{k=1}^{m} a_{ki}u_k,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} = b_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j,$$

a_i fiind vectorul linie i din matricea A. Se definesc acum variabilele v_i şi s_k, astfel:

$$v_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} = p_i + \sum_j c_{ij}x_j + \sum_k a_{ki}u_k; \quad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(VI.4.33)}$$

$$s_k = \frac{\partial F}{\partial u_k} = b_k - \sum_j a_{kj}x_j. \qquad k = 1, \ldots, m \qquad \text{(VI.4.34)}$$

Condiţiile de optimalitate pentru x^* scrise în noile variabile sînt:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i = 0, \qquad \text{(VI.4.35)} \Leftarrow \text{(VI.4.28)}$$

$$\sum_{k=1}^{m} s_k u_k = 0, \qquad \text{(VI.4.36)} \Leftarrow \text{(VI.4.30)}$$

$$v_i = p_i + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j + \sum_k a_{ki}u_k; \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{(VI.4.37)} \Leftarrow \text{(VI.4.33)}$$

$$s_k = b_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j; \qquad k = 1, \ldots, m, \qquad \text{(VI.4.38)} \Leftarrow \text{(VI.4.34)}$$

$$x_i \geqslant 0; \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{(VI.4.39)} \Leftarrow \text{(VI.4.31)}$$

$$u_k \geqslant 0; \qquad k = 1, \ldots, m, \qquad \text{(VI.4.40)} \Leftarrow \text{(VI.4.32)}$$

$$v_i \geqslant 0; \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \text{(VI.4.41)} \Leftarrow \text{(VI.4.27)}$$

$$s_k \geqslant 0; \qquad k = 1, \ldots, m. \qquad \text{(VI.4.42)} \Leftarrow \text{(VI.4.29)}$$

Condiţiile de nenegativitate a vectorului x, u, v şi s ne asigură că produsele vx şi su sînt nenegative şi că suma lor nu se poate anula decît dacă fiecare produs este nul. Cu această observaţie problema se reformulează astfel:

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine soluţia sistemului

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_j + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, u_k - v_i = -p_i\,; \quad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(VI.4.43)}$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\, x_j + s_k = b_k\,; \quad k = 1, \ldots, m, \qquad \text{(VI.4.44)}$$

$$x_i \geqslant 0\,;\; u_k \geqslant 0\,;\; v_i \geqslant 0\,;\; s_k \geqslant 0 \qquad \text{(VI.4.45)}$$

care minimizează funcţia

$$T \equiv \sum_{i=1}^{n} v_i\, x_i + \sum_{k=1}^{m} s_k\, u_k. \qquad \text{(VI.4.46)}$$

Minimul acestei funcţii este evident egal cu zero. Notăm problema (VI.4.43)—(VI.4.46) cu $\tau(C,p,A,b)$. Matricea sistemului de restricţii a problemei $\tau(C,p,A,b)$ este

$$M = \left[\begin{array}{cccccc}
\overleftarrow{\quad x \quad} & & & \overleftarrow{\quad u \quad} & & \overleftarrow{\quad v \quad} \quad \overleftarrow{\quad s \quad} \\
c_{11}\, c_{12} \ldots c_{1n} & & & a_{11} \ldots a_{m1} & & -1 \ldots\ldots 0 \quad 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot \\
c_{n1}\, c_{n2} \ldots c_{nn} & & & a_{1n} \ldots a_{mn} & & 0 \ldots\ldots -1 \quad 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\
a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} & & & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \quad 1 \ldots\ldots\ldots 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & & & \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot \\
a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} & & & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \quad 0 \ldots\ldots\ldots 1
\end{array}\right]$$

Această matrice de dimensiuni $(m+n) \times 2(m+n)$ se mai poate scrie

$$M = \begin{bmatrix} C & A' & -E^{(n)} & 0 \\ A & O & O & E^{(m)} \end{bmatrix},$$

unde $E^{(n)}$ şi $E^{(m)}$ sînt matrici unitate respectiv de ordinul n şi m. Vectorul necunoscutelor în $\tau(C,p,A,b)$ este vectorul-coloană $\xi = [x,u,v,s]$, iar vectorul termenilor constanţi este $B = [-p,b]$, deci problema $\tau(C,p,A,b)$ se scrie sub formă matricială

$$\begin{gathered} Cx + A'u - v = -p', \\ Ax + s = b, \qquad \text{(VI.4.47)} \\ x \geqslant 0\,;\; u \geqslant 0\,;\; v \geqslant 0\,;\; s \geqslant 0, \\ \min T = v'x + su. \end{gathered}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă sînt îndeplinite condiţiile:

(1) matricea A are rang m;

(2) vectorul $B = [-p,b]$ nu este liniar dependent de mai puţin de $(m + n)$ vectori-coloană din matricea M,

problema $\tau(C,p,A,b)$ are o soluţie (x^*,u^*) optimă pentru care $T = 0$, adică

$$v'x^* = 0 \text{ şi } su^* = 0;$$

$v'x$ este o sumă de termeni pozitivi, deci de formare $v_j x_j^*$, şi se anulează dacă fiecare termen al sumei este nul; dacă $x_j^* = 0$; v_j poate fi nenul; dacă $x_j^* > 0$, v_j trebuie să se anuleze. Să presupunem că numărul componentelor nule ale vectorului x^* este egal cu n_1; atunci avem

$$n - n_1 \text{ componente } x_j^* > 0,$$

$$n_1 \text{ componente } v_j > 0;$$

su^* este de asemenea o sumă de termeni pozitivi, deoarece x^* este o soluţie a sistemului (VI.4.22), deci din (VI.4.34) avem

$$s_k = b_k - \sum_j a_{kj} x_j^* \geqslant 0.$$

Să admitem că m_1 restricţii din sistemul (VI.4.22) sînt satisfăcute cu semnul $=$. Atunci m_1 dintre numerele s_k sînt nule şi

$$m - m_1 \text{ componente } s_k > 0,$$

care implică

$$m_1 \text{ componente } u_k^* > 0.$$

În rezumat, din aceste consideraţii rezultă că în soluţia optimă a problemei $\tau(C,p,A,b)$, exact $(m + n)$ dintre mărimile $x_1,\ldots,x_n$; $u_1,\ldots,u_m$; $v_1,\ldots,v_n$; $s_1,\ldots,s_m$ sînt pozitive dacă vectorul $B = [-p,b]$ îndeplineşte condiţia (2) şi că această soluţie este unică. Soluţia problemei $\tau(C,p,A,b)$ este o soluţie de bază a sistemului (VI.4.43)—(VI.4.44). Vectorul x^* din această soluţie este *punctul de maxim* al problemei $P(C,p,A,b)$ şi acest punct este *unic*. Rezultatul la care s-a ajuns concordă cu corolarul 4 din § 2.

Teorema Kuhn—Tucker pentru problema generală de programare neliniară. Fie dată problema de programare neliniară sub forma

$$\max z = f(x), \qquad \text{(VI.4.48)}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu restricţiile:

$$g_i(x) \leqslant b_i; \quad i = 1, \ldots, m_1,$$

$$g_i(x) \geqslant b_i; \quad i = m_1 + 1, \ldots, m_2,$$

$$g_i(x) = b_i; \quad i = m_{2+1}, \ldots, m, \tag{VI.4.49}$$

$$x \geqslant 0,$$

în care $f(x)$ şi $g_i(x)$ sînt continue şi derivabile pentru orice $x \geqslant 0$. Transformînd inecuaţiile sistemului (VI.4.49) în ecuaţii prin adăogarea variabilelor de abatere, avem problema echivalentă

$$\max z = f(x),$$

cu restricţiile

$$g_i(x) + \xi_i = b_i \quad i = 1, \ldots, m_1,$$

$$g_i(x) - \xi_i = b_i \quad i = m_1 + 1, \ldots, m_2,$$

$$g_i(x) = b_i \qquad i = m_2 + 1, \ldots, m. \tag{VI.4.50}$$

$$[x, \xi] \geqslant 0$$

Se defineşte vectorul $u(u_1, \ldots, u_m)$ şi se scrie funcţia Lagrange

$$F(x,u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(x).$$

Fie x^* un optim local al funcţiei (VI.4.48) pe mulţimea Y a soluţiilor sistemului (VI.4.49). Notăm cu:

J_1 mulţimea indicilor j pentru care $x_j^* = 0$,

J_2 mulţimea indicilor j pentru care $x_j^* > 0$,

Soluţia x^* satisface relaţiile de indici $i = 1, \ldots, m_2$ ale sistemului (VI.4.49), cu semnul „$<$" respectiv „$>$". Aceste restricţii le vom numi „active", iar cele satisfăcutecu semnul „$=$" se numesc „inactive". Fie I_1 mulţimea indicilor restricţiilor „inactive", adică satisfăcute cu

Scanned with OKEN Scanner

semnul „=" de x^* şi I_2 mulţimea indicilor restricţiilor „active". Pentru sistemul (VI.4.49) se notează cu G_f matricea

$$G_f = \begin{bmatrix} G \\ \nabla f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

deci pentru sistemul (VI.4.50) avem

$$\bar{G}_f = \begin{bmatrix} \bar{G} \\ \nabla f(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & 1 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial g_{m_1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{m_1}}{\partial x_n} & 0 \cdots 1 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \frac{\partial g_{m_1+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{m_1+1}}{\partial x_n} & 0 \cdots 0 -1 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial g_{m_2}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{m_2}}{\partial x_n} & 0 \cdots 0 & 0 \cdots -1 & 0 \cdots 0 \\ \frac{\partial g_{m_2+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{m_2+1}}{\partial x_n} & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se demonstrează [38] că dacă $r(\bar{G}) = r(\bar{G}_f) = m$ pentru soluția $[x^*, \xi^*]$ există un vector u^*, unic determinat, astfel încît x^* este un optim local pentru funcția $f(x)$ pe mulțimea Y, dacă și numai dacă

$$\nabla_x F(x^*,u^*) = \nabla f(x^*) - \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(x^*) \begin{cases} \leqslant 0 \text{ pentru } j \in J_1(x_j^* = 0), \\ = 0 \text{ pentru } j \in J_2(x_j^* > 0); \end{cases} \tag{VI..4.51}$$

$$\nabla_x F(x^*,u^*) = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \left\{ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} u_i^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \right\} = 0; \tag{VI.4.52}$$

$$\nabla_u F(x^*,u^*) = [b_1 - g_1(x^*), \ldots, b_m - g_m(x^*)]$$

au primele m_1 componente nenegative.
componentele $m_1 + 1, \ldots, m_2$ nepozitive și (VI.4.53)
componentele $m_2 + 1, \ldots, m$ nule:

$$\nabla_u F(x^*, u^*) u^* = \sum_{i=1}^{m} u_i^* [b_i - g_i(x^*)] = 0. \tag{VI.4.54}$$

Aceste condiții necesare și suficiente pentru ca x^* să fie optimul local al funcției $f(x)$ pe mulțimea Y se numesc condițiile Kuhn—Tucker.

Este ușor de arătat că, pentru cazul particular

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j; \; i = 1, \ldots, m, \tag{VI.4.55}$$

condițiile (VI.4.51)—(VI.4.54) se reduc la condițiile Kuhn—Tucker stabilite la începutul acestui paragraf. În adevăr, relațiile (VI.4.51) și (VI.4.52), în care $g_i(x)$ sînt de forma (VI.4.55), se transformă în (VI.4.9)—(VI.4.10), iar ultima în (VI.4.11). Condițiile (VI.4.53) arată că x^* este o soluție a sistemului de restricții al problemei. Condiția (VI.4.54) este necesară numai pentru problema generală, deoarece modelul inițial conține numai restricții de forma

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i; \quad i = 1, \ldots, m,$$

în timp ce sistemul (VI.4.49) conține relații cu semnele $\leqslant$, $\geqslant$ și $=$. Vectorul u asociat problemei (VI.4.1) — (VI.4.3) este nenegativ și definit astfel:

$u_i \geqslant 0$ pentru $i \in I_1$ (restricții satisfăcute de x^* cu semnul $=$),
$u_i = 0$ pentru $i \in I_2$ (restricții satisfăcute de x^* cu semnul $<$).

Scanned with OKEN Scanner

Aceste condiții impuse vectorului u sînt necesare și suficiente pentru ca (VI.4.54) să fie satisfăcută. Vectorului u^* asociat problemei (VI.4.48)—(VI.4.49) nu i s-au impus restricții de semn, astfel că (VI.4.54) apare ca o condiție suplimentară.

G. Hadley, în lucrarea citată, demonstrează următoarea:

Teoremă. Condițiile Kuhn-Tucker necesare și suficiente pentru ca x^* să fie un punct de maxim local al funcției $f(x)$ pe mulțimea Y sînt condiții necesare și suficiente pentru ca x^* să fie un punct de maxim absolut al acestei funcții, dacă $f(x)$ este concavă pentru $x \geqslant 0$ și:

$$g_i(x) \text{ este convexă dacă } u_i^* > 0,$$

$$g_i(x) \text{ este concavă dacă } u_i^* < 0.$$

În cazul particular al problemei de programare pătratică, funcțiile $g_i(x)$ sînt liniare, deci pot fi considerate atît funcții convexe cît și concave. De aici se deduce că teorema enunțată afirmă că, pentru problema de programare pătratică, condițiile Kuhn-Tucker sînt necesare și suficiente pentru ca x^* să fie un punct de maxim absolut al funcției $f(x)$ pe mulțimea Y, fără a fi necesare restricții de semn pentru componentele vectorului u^*.

§ 5. METODA SIMPLEX PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR DE PROGRAMARE PĂTRATICĂ

Fie dată problema de programare pătratică

$$\min f(x, \lambda) = \lambda p x + \frac{1}{2} x' C x, \qquad \text{(VI.5.1)}$$

cu respectarea condițiilor

$$A x = b,$$

$$x \geqslant 0, \qquad \text{(VI.5.2)}$$

unde: λ este un parametru real nenegativ;

C — o matrice $n \times n$, simetrică și semidefinită pozitiv;

p — o matrice $1 \times n$.

Rezultatele obținute de Barankin și Dorfman, expuse anterior, se pot enunța în forma următoare:

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1. Vectorul $x \geqslant 0$ care satisface sistemul $Ax = b$ este o soluție a problemei $F(\lambda) = \min\left\{\lambda p\, x + \frac{1}{2} x'Cx : x \geqslant 0, \quad Ax = b\right\}$ pentru $\lambda \geqslant 0$ dacă se poate determina un vector $n \times 1$ nenegativ, v, și un vector $m \times 1$ fără restricții de semn, u, astfel ca

$$\begin{aligned} Cx + A'u - v + \lambda p' &= 0, \\ v'x &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(VI.5.3)}$$

Pe baza acestei teoreme, Philip Wolfe [77] construiește metode simplex pentru rezolvarea problemelor de programare pătratică în următoarele cazuri:

a) $\lambda = 0$ sau C definită pozitiv;

b) $\lambda \geqslant 0$, C semidefinită pozitiv.

Algoritmul pentru cazul (a) este denumit „forma scurtă" și cel pentru cazul (b) este denumit „forma lungă".

Pentru justificarea algoritmelor se mai demonstrează

Teorema 2. Pentru orice $\lambda \geqslant 0$

1) Funcția $F(\lambda) = \min\{\lambda px + 1/2\, x'Cx : x \geqslant 0, \; Ax = b\}$ este o funcție concavă.

2) px_λ este monoton necrescătoare.

3) x_λ este o soluție g a problemei

$$\min\{g'Cg;\; g \geqslant 0,\; Ag = b,\; pg \leqslant px_\lambda\}.$$

Demonstrație. Punctul (1). Prin definiție avem:

$$f(x, \lambda_1) = \lambda_1 px + \frac{1}{2} x'Cx,$$

$$f(x, \lambda_2) = \lambda_2 px + \frac{1}{2} x'Cx.$$

Înmulțind aceste relații cu θ, respectiv $(1 - \theta)$, și însumînd, găsim

$$\theta f(x, \lambda_1) + (1 - \theta) f(x, \lambda_2) = [\theta\lambda_1 + (1 - \theta)\lambda_2] px + \frac{1}{2} xCx',$$

$$\min\{\theta f(x, \lambda_1) + (1 - \theta) f(x, \lambda_2)\} = F[\theta\lambda_1 + (1 - \theta)\lambda_2].$$

Dar

$$\min\{\theta f(x, \lambda_1) + (1 - \theta) f(x, \lambda_2)\} \geqslant \theta \min f(x, \lambda_1) + (1 - \theta) \min f(x, \lambda_2).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$\min f(x, \lambda_1) = F(\lambda_1) \text{ şi } \min f(x, \lambda_2) = F(x_2),$$

rezultă că

$$F[\theta\lambda_1 + (1 - \theta)\lambda_2] \geqslant \theta F(\lambda_1) + (1 - \theta)F(\lambda_2),$$

ceea ce dovedeşte că funcţia $F(\lambda)$ este concavă.

Punctul (2). Funcţia px_λ este monoton necrescătoare dacă pentru $\lambda_1 > \lambda_2$, $px_{\lambda_1} \leqslant px_{\lambda_2}$. În adevăr, dacă x_{λ_1} este soluţia optimă pentru $f(\lambda_1, x)$ şi x_{λ_2} soluţia optimă pentru $f(\lambda_2, x)$, avem

$$f(\lambda_1, x_{\lambda_1}) \leqslant f(\lambda_1, x_{\lambda_2}),$$

$$f(\lambda_2, x_{\lambda_2}) \leqslant f(\lambda_2, x_{\lambda_1})$$

sau

$$\lambda_1 p x_{\lambda_1} + \frac{1}{2} x'_{\lambda_1} C x_{\lambda_1} \leqslant \lambda_1 p x_{\lambda_2} + \frac{1}{2} x'_{\lambda_2} C x_{\lambda_2},$$

$$\lambda_2 p x_{\lambda_2} + \frac{1}{2} x'_{\lambda_2} C x_{\lambda_2} \leqslant \lambda_2 p x_{\lambda_1} + \frac{1}{2} x'_{\lambda_1} C x_{\lambda_1}.$$

Adunînd aceste inegalităţi şi regrupînd termenii avem

$$(\lambda_1 - \lambda_2) p x_{\lambda_1} \leqslant (\lambda_1 - \lambda_2) p x_{\lambda_2}.$$

Deoarece am presupus $\lambda_1 > \lambda_2$, inegalitatea obţinută se poate simplifica cu factorul $\lambda_1 - \lambda_2$ şi astfel afirmaţia din (2) este demonstrată.

Punctul (3). Deoarece x_λ minimizează funcţia $\lambda px + \frac{1}{2} x'Cx$, pentru orice vector g, avem

$$\lambda p x_\lambda + \frac{1}{2} x'_\lambda C x_\lambda \leqslant \lambda p g + \frac{1}{2} g' C g,$$

deci dacă

$$g'Cg < x'_\lambda C x_\lambda$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că

$$px_\lambda < pg$$

și aceasta dovedește ultima afirmație a teoremei.

Forma scurtă a algoritmului simplex pentru programarea pătratică. Rezultatele stabilite prin teorema 1 conduc la înlocuirea problemei de programare pătratică prin următoarele probleme de programare liniară :

Faza inițială

$$\min \sum_{i=1}^{m} w_i, \tag{VI.5.4}$$

cu condițiile

$$\begin{aligned} Ax \qquad\qquad\qquad\qquad + w &= b, \\ Cx + A'u - v + \zeta - \eta \quad &= -\lambda p', \\ x, v, \zeta, \eta, w &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{VI.5.5}$$

Această problemă nu include condiția $v'x = 0$ necesară pentru ca x să fie soluția problemei inițiale, deci constituie numai o primă etapă în rezolvarea problemei propuse. Pentru minimizarea funcției obiectiv se folosește algoritmul simplex, menținînd vectorii u și v nuli. Astfel, problema are $(m + n)$ ecuații și numai $(m + 3n)$ necunoscute, iar faptul că nu este obligatoriu ca vectorul u să fie nenegativ, nu mai constituie o dificultate în aplicarea algoritmului simplex. Minimul funcției obiectiv trebuie să fie nul. Astfel, în această fază se determină în fond o soluție realizabilă a sistemului $Ax = b$. După rezolvarea problemei se exclud din model vectorul w și toate componentele vectorilor ζ și η care nu aparțin bazei optimale. Se notează cu Z cele n componente rămase și cu I matricea coeficienților lor. În acest fel dispunem de o soluție a sistemului

$$\begin{aligned} Ax \qquad\qquad &= b, \\ Cx + A'u - v + IZ &= -\lambda p', \\ x, v, Z &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{VI.5.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Faza recursivă. Se determină

$$\min \sum_{j=1}^{n} Z_j, \tag{IV.5.7}$$

cu condiţiile (VI.5.4) la care se mai adaugă condiţia

$$v' \; x = 0. \tag{VI.5.8}$$

Vectorul x^*, care face parte din soluţia acestei probleme, îndeplineşte toate condiţiile teoremei 1, deci este soluţia problemei de programare pătratică. Modelul din faza recursivă se rezolvă prin algoritmul simplex dacă se înlocuieşte condiţia (VI.5.8) prin următoarea *modificare adusă algoritmului*:

— dacă x_k aparţine bazei, v_k nu poate intra în bază;

— dacă v_k aparţine bazei, x_k nu poate intra în bază. (VI.5.9)

Modelul din faza recursivă are, ca şi cel din faza iniţială, $(m + n)$ ecuaţii şi $(m + 3n)$ necunoscute. Minimul funcţiei obiectiv trebuie să fie nul.

Forma lungă a algoritmului simplex pentru programarea pătratică. Aşa cum s-a mai spus, această formă se foloseşte pentru rezolvarea problemei (VI.5.1) — (VI.5.2), unde λ este un parametru care poate lua valori nenegative, deci trebuie rezolvată o problemă de programare pătratică în care funcţia obiectiv depinde liniar de un parametru. În cazul problemelor de programare liniară parametrică rezolvarea constă în determinarea valorilor caracteristice ale parametrului şi a bazelor optimale pentru aceste valori.

Acelaşi lucru se poate spune şi despre programul pătratic parametrizat, deci rezolvarea problemei va consta din:

— determinarea soluţiei pentru $\lambda = 0$;

— calculul valorii maxime λ_1 pentru care această soluţie îşi păstrează caracterul de optimalitate;

— determinarea soluţiei pentru $\lambda > \lambda_1$ etc.

Faza iniţială. Se rezolvă programul liniar

$$\min \sum_{i=1}^{m} w_i, \tag{VI.5.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu condiţiile

$$\begin{aligned} Ax \qquad\qquad\qquad + w &= b, \\ Cx + A'u - v + \zeta - \eta \quad &= 0, \\ x, v, \zeta, \eta, w &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{VI.5.11}$$

Acest model se obţine din (VI.5.4) — (VI.5.5) pentru $\lambda = 0$. Teorema 2, punctul (3), justifică folosirea modelului pentru rezolvarea problemei propuse. Valoarea minimă a funcţiei obiectiv trebuie să fie nulă şi astfel soluţia acestei probleme constituie o soluţie iniţială pentru

$$\min \sum_{j=1}^{n} Z_j, \tag{VI.5.12}$$

cu condiţiile

$$\begin{aligned} Ax \qquad\qquad\qquad &= b, \\ Cx + A'u - v + \mu p' + IZ \quad &= 0, \\ x, v, Z &\geqslant 0, \end{aligned} \tag{VI.5.13}$$

în care $\mu = 0$. Rezolvînd această problemă cu condiţia suplimentară $v'x = 0$ se obţine soluţia pentru care $\min \sum_{j=1}^{n} Z_j = 0$.

Faza recursivă. La sfîrşitul fazei iniţiale se obţine o soluţie de bază pentru modelul

$$\min - \mu, \tag{VI.5.14}$$

cu condiţiile (VI.5.13). Soluţia acestei probleme se obţine folosind algoritmul simplex cu *condiţiile suplimentare*:

- dacă x_k aparţine bazei, v_k nu poate intra în bază;
- dacă v_k aparţine bazei, x_k nu poate intra în bază; (VI.5.15)
- nici un Z_j nu poate intra în bază.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în aceste condiţii nu se poate face nici o schimbare a bazei atunci $\mu = 0$ şi $F(\lambda) = -\infty$ pentru toţi $\lambda > 0$, deci problema nu are un minim finit pentru $\lambda \neq 0$.

În cazul în care schimbarea bazei este posibilă, se obţine şirul de valori

$$0 = \mu^0 < \mu^1 < \ldots < \mu^k$$

şi soluţiile optime pentru fiecare valoare a parametrului.

Dacă se notează cu $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ vectorii x din soluţiile optime corespunzătoare valorilor caracteristice ale parametrului μ se demonstrează că soluţia optimă a problemei de programare pătratică pentru

$$\mu^t \leqslant \lambda \leqslant \mu^{t+1}$$

se obţine prin interpolare din soluţiile corespunzătoare valorilor caracteristice μ^t şi μ^{t+1}, adică

$$x_\lambda = \frac{1}{\mu^{t+1} - \mu^t} [(\mu^{t+1} - \lambda)x^{(t)} + (\lambda - \mu^t)x^{t+1}],$$

şi pentru

$$\lambda > \mu^k$$

$$x_\lambda = x^{(k)} + (\lambda - \mu^k)x^\infty$$

dacă se notează cu x^∞ soluţia optimă pentru valorile parametrului superioare valorii μ^k.

Metoda Wolfe de rezolvare a problemelor de programare pătratică utilizează în fazele recursive un algoritm simplex completat cu anumite condiţii de intrare în bază a unui vector, condiţii care nu figurează în algoritmul simplex pentru programele liniare. Aceste condiţii sînt formulate în (VI.5.9). Algoritmele simplex pentru programele liniare precizează ce se întîmplă atunci cînd nu se mai poate opera o schimbare a bazei. Acelaşi lucru se precizează şi pentru algoritmul simplex, cu condiţiile suplimentare (VI.5.9), prin

Teorema 3. Fie A, b, C matricele din modelul problemei de programare pătratică, Q_0 matrice $n \times n_1$, q o matrice $1 \times n_1$ şi g o matrice $n \times 1$, $x \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, astfel ca $v'x = 0$. Se notează cu

x_x componentele pozitive din x, deci $x_x > 0$;
v_x componentele corespunzătoare din v, deci $v_x = 0$;
v_v componentele pozitive din v, deci $v_v > 0$;
x_v componentele corespunzătoare din x, deci $x_v = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă forma liniară

$$qw \tag{VI.5.16}$$

este minimă pe sistemul de restricţii

$$\begin{aligned} v_x &= 0, \\ x_v &= 0, \\ Ax &= b, \\ Cx + A'u - Ev + Qw &= g, \end{aligned} \tag{VI.5.17}$$

atunci există un vector r astfel ca

$$rC = 0; \qquad Ar' = 0 \qquad \text{şi} \qquad qw = rg.$$

Reproducem demonstraţia teoremei, dată de P. Wolfe în lucrarea citată.

Demonstraţie. Vectorii x şi v se descompun în vectorii

$$x_x > 0; \qquad x_\delta \geqslant 0; \qquad x_v = 0,$$

$$v_x = 0; \qquad v_\delta \geqslant 0; \qquad v_v > 0.$$

Primele două restricţii din (VI.5.17) constituie expresia liniară a condiţiilor suplimentare pentru intrarea în bază a unui vector. Matricea coeficienţilor din ultimele două restricţii, după descompunerea vectorilor x şi v, este dată în următorul tabel, care mai conţine:

— în linia 1, variabilele problemei primale;

— în coloana 1, variabilele problemei duale;

— în coloana ultimă, semnul şi termenul din mebrul stîng al restricţiei în problema primală;

— în ultima linie, semnul şi termenul din membrul stîng al restricţiei în problema duală.

Variabilele duale fiind asociate unor ecuaţii nu au restricţii de semn.

Scanned with OKEN Scanner

	$x_x>0$	$x_\delta \geqslant 0$	$x_v = 0$	u	$v_x = 0$	$v_\delta \geqslant 0$	$v_v>0$	$w \geqslant 0$	
s	A_x	A_δ	A_v	0	0	0	0	0	$= b$
r_x	C_{xx}	$C'_{x\delta}$	C'_{xv}	A'_x	$-E_x$	0	0		$= g_x$
r_δ	$C_{x\delta}$	$C_{\delta\delta}$	$C'_{\delta v}$	A'_δ	0	$-E_\delta$	0	Q	$= g_\delta$
r_v	C_{xv}	$C_{\delta v}$	C_{vv}	A'_v	0	0	$-E_v$		$= g_v$
	$= 0$	$\leqslant 0$	0	$= 0$	0	$\leqslant 0$	$= 0$	$\leqslant q$	

Variabilele x_v și v_x fiind nule, coloanele matricei asociate lor pot fi șterse din tabel. Duala problemei (VI.5.16) — (VI.5.17) este

$$\max (sb + rg), \tag{VI.5.18}$$

cu respectarea condițiilor:

$$\begin{aligned}
sA_x + r_x C_{xx} + r_\delta C_{x\delta} + r_v C_{xv} &= 0, && \text{(a)}\\
sA_\delta + r_x C'_{x\delta} + r_\delta C_{\delta\delta} + r_v C_{\delta v} &\leqslant 0, && \text{(b)}\\
r_x A'_x + r_\delta A'_\delta + r_v A'_v &= 0, && \text{(c)}\\
-r_\delta E_\delta &\leqslant 0, && \text{(d)}\\
-r_v E_v &= 0; && \text{(e)}\\
[r_x, r_\delta, r_v]Q &\leqslant q. && \text{(f)}
\end{aligned} \tag{VI.5.19}$$

Relația (VI.5.19) (c) scrisă sub forma $rA' = 0$ dovedește una din afirmațiile teoremei 3.

Din (VI.5.19) (d) și (e) avem

$$r_\delta \geqslant 0 \quad \text{și} \quad r_v = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultate care transformă sistemul (VI.5.19) în:

$$\begin{aligned} sA_x + r_x C_{xx} + r_\delta C_{x\delta} &= 0, && \text{(a)} \\ sA_\delta + r_x C'_x\delta + r_\delta C_{\delta\delta} &\leqslant 0, && \text{(b)} \\ r_x A'_x + r_\delta A'_\delta &= 0, && \text{(c)} \\ [r_x, r_\delta]Q &\leqslant q. && \text{(d)} \end{aligned} \qquad \text{(VI.5.20)}$$

Sistemul (VI.5.20) se mai poate transforma înmulţind la dreapta relaţiile (a) şi (b) respectiv cu vectorii r'_x şi r'_δ şi adunîndu-le; avem:

$$s(A_x r'_x + A_\delta r'_\delta) + [r_x r_\delta] \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{x\delta} \\ C'_{x\delta} & C_{\delta\delta} \end{bmatrix} [r_x r_\delta]' \leqslant 0,$$

relaţie care, ţinînd seama de (VI.5.20) (c), se transformă în

$$[r_x r_\delta] \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{x\delta} \\ C'_{x\delta} & C_{\delta\delta} \end{bmatrix} [r_x r_\delta]' = 0. \qquad \text{(VI.5.21)}$$

Semnul $\leqslant$ s-a înlocuit cu semnul $=$, deoarece matricea este semidefinită pozitiv fiind o submatrice principală a unei matrice semidefinită pozitiv. Din relaţia (VI.5.21) rezultă (v. teorema 9, § 3)

$$\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{x\delta} \\ C'_{x\delta} & C_{\delta\delta} \end{bmatrix} [r_x r_\delta] = 0 \qquad \text{(VI.5.22)}$$

sau, deoarece $r_v = 0$, putem scrie $rC = 0$, ceea ce confirmă primul rezultat enunţat în teorema 3.

Dezvoltînd ecuaţia matriceală (VI.5.22) avem

$$\begin{aligned} C_{xx} r'_x + C_{x\delta} r'_\delta &= 0, \\ C'_{x\delta} r'_x + C_{\delta\delta} r'_\delta &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(VI.5.23)}$$

Ţinînd seama de (VI.5.23), ecuaţia (VI.5.20) (a) se reduce la

$$sA_x \doteq 0. \qquad \text{(VI.5.24)}$$

Teorema dualităţii afirmă că pentru soluţia optimă funcţiile obiectiv ale problemelor duale iau aceeaşi valoare, deci

$$qw = sb + rg. \qquad \text{(VI.5.25)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Calculăm pe sb. Din problema primală avem

$$A_x x_x + A_\delta x_\delta + A_v x_v = b,$$

deci

$$sb = s[A_x x_x + A_\delta x_\delta + A_v x_v]$$

sau, ţinînd seama de egalitatea (VI.5.24),

$$sb = 0.$$

Înlocuind sb cu zero în relaţia (VI.5.25), rezultă

$$qw = rg$$

şi astfel se dovedeşte ultima afirmaţie din teorema 3.

Să cercetăm acum ce concluzii se pot trage dacă, forma liniară

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j$$

poate fi adusă la valoarea zero ţinînd seama de condiţia $v'x = 0$. În acest caz se minimizează forma qw din teorema 3 şi se ia

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j = qw = rg = -\lambda r p'$$

şi $rC = 0$. Dacă C este definită pozitiv, atunci

$$r\,C = 0 \Rightarrow r = 0,$$

iar dacă $\lambda = 0$, atunci

$$\sum_{1} Z_k = 0,$$

astfel încît atunci cînd ipoteza teoremei 1 este satisfăcută s-a determinat soluţia pentru problema de programare pătratică.

Dacă avem de rezolvat problema parametrizată, soluţia pentru $Z = 0$ constituie o soluţie de plecare în forma lungă a algoritmului şi se procedează la minimizarea lui $-\lambda$. Teorema 3 se aplică acum luînd

$$Q = p'; \quad q = -1; \quad g = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă faza recursivă se sfîrşeşte de data aceasta cu o valoare finită pentru $-\lambda$, ipoteza teoremei 3 este satisfăcută şi avem

$$-\lambda = qw = rg = 0,$$

deci, de fapt, $-\lambda$ nu trebuie redus la zero. Se pot prezenta două cazuri:

1° nu este posibilă nici o schimbare de bază, astfel încît $-\lambda$ să ia o valoare mai mică;

2° se poate obţine o bază pentru care $-\lambda$ să fie redus la $-\infty$. În cazul 1°, sistemul de restricţii fiind nedegenerat, soluţia conţine exact $(m + n)$ variabile pozitive, dintre care m aparţin vectorului u şi n aparţin vectorilor x_x şi v_v, deci $x_\delta = \emptyset$ şi $v_\delta = \emptyset$.

În baza teoremei 3 avem

$$Ar' = 0, \qquad Cr' = 0 \tag{VI.5.26}$$

şi deci (VI.5.19) (f)

$$pr' \leqslant -1. \tag{VI.5.27}$$

Atunci, pentru orice t

$$A(x + tr') = b,$$

$$C(x + tr') + A'u - v = 0.$$

Vectorul r este nenegativ şi oricare ar fi $t \geqslant 0$, $x + tr'$ satisface restricţiile (VI.5.17), deci

$$f(\lambda, x + tr) = \lambda px + \frac{1}{2} x'Cx + \lambda pr't.$$

Deoarece $pr' \leqslant -1$, $f(\lambda, x + tr') \to -\infty$ cînd $t \to +\infty$ şi pentru orice $\lambda > 0$, funcţia $f(\lambda, x)$ nu are un minim finit.

În cazul 2° valorile lui λ sînt mărginite. Problema dispune totuşi de un număr mărginit de baze, deci de soluţii de bază (x^i, v^i, u^i, μ^i) $i = 1, \ldots, k$ şi soluţia $(x^{k+1}, v^{k+1}, u^{k+1})$, încît

$$(x^k + tx^{k+1}, v^k + tv^{k+1}, u^k + tu^{k+1}, \mu^k + t)$$

este o soluţie pentru toţi $t \geqslant 0$.

Deoarece $v'x = 0$ avem

$$0 = v^i x^i = v^i x^{i+1} = v^{i+1} x^i = v^{i+1} x^{i+1},$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\mu^i < \mu^{i+1}$; $i = 1, \ldots, g$ și $\mu^i \leqslant \lambda \leqslant \mu^{i+1}$, punctul

$$x = \frac{\mu^{i+1} - \lambda}{\mu^{i+1} - \mu^i} x^i + \frac{\lambda - \mu^i}{\mu^{i+1} - \mu^i} x^{i+1}$$

este o combinație liniară convexă de x^i și x^{i+1}.

Dacă v și u sînt combinații liniare similare de v^i, v^{i+1}; u^i, u^{i+1}, atunci x, v, u satisfac teorema 3 și x este soluția pentru λ dat.

Dacă $\lambda \geqslant \mu^k$ atunci

$$x = x^k + (\lambda - \mu^k) x^{k+1};$$

v și u construiți similar satisfac teorema 3 și x este soluția cerută.

Cazurile în care problemele de programare pătratică se rezolvă prin metoda Wolfe se pot rezuma astfel:

	Forma scurtă	Forma lungă
Condiții	sau $\lambda = 0$ sau C definit pozitiv	C semidefinit pozitiv
Soluții pentru	λ dat	$\lambda \geqslant 0$
Dimensiunile programelor liniare	cel mult $(m + n)$ ecuații $(m + 3n)$ variabile	cel mult $(m + n)$ ecuații $(m + 3n + 1)$ variabile
Numărul estimat al iterațiilor	$2(m + n)$	$4(m + n)$

Vom aplica metoda Wolfe pe următorul

Exemplu I. Să se determine minimul funcției

$$f(x) = x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 - 4x_1x_3 - 2x_1x_4 + 4x_2x_4, \quad \text{(VI.5.28)}$$

cu condiţiile

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 &\geqslant 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &\leqslant 4, \\ x_i \geqslant 0; \qquad i = 1, \ldots, 4. & \end{aligned} \tag{VI.5.29}$$

În acest exemplu avem

$$p = [1, -3, -2, 7] \qquad A \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = [3, 4],$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 10 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Se poate verifica că matricea C este definită pozitiv, deci problema se încadrează în condiţiile cerute pentru forma scurtă a metodei Wolfe.

Faza iniţială. Sistemul restricţiilor, transformat în sistem de ecuaţii, este

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 + \zeta_1 \qquad - \zeta_3 &= 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \qquad + \zeta_2 \qquad &= 4. \end{aligned} \tag{VI.5.30}$$

Obiectivul fazei iniţiale, în fond, este determinarea unei soluţii realizabile a acestui sistem, deci funcţia obiectiv este

$$\min \zeta = \zeta_1, \tag{VI.5.31}$$

cu condiţiile scrise sub forma matricială:

$$\begin{array}{c|cccc|cc|cccc|cccc|cccc|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & u_1 & u_2 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \\ \hline & 4 & 0 & -4 & -2 & 1 & 2 & -1 & & & & 1 & & & & -1 & & & & & & & = -1 \\ & 0 & 2 & 0 & 4 & 3 & -1 & & -1 & & & & 1 & & & & -1 & & & & & & = 3 \\ & -4 & 0 & 10 & 0 & 0 & 1 & & & -1 & & & & 1 & & & & -1 & & & & & = 2 \\ & -2 & 4 & 0 & 10 & -1 & 1 & & & & -1 & & & & 1 & & & & -1 & & & & = -7 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & 0 & & & 0 & & & & 0 & & & 1 & 0 & -1 & = 3 \\ & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 0 & = 4 \end{array}$$

Soluţia optimă pentru faza iniţială se obţine după o singură schimbare de bază şi $\min \zeta_1 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Variabilele ξ_1, ξ_2, η_2 și η_4 nu aparțin bazei optime, astfel că nu mai figurează în modelul pentru faza recursivă. De asemenea dispare și variabila ζ_i

Tabelul simplex pentru faza inițială

(170)

$c_j \rightarrow$			0	0	0	0	0	1 0 0
$c_B \downarrow$	Baza	Const	x_1 x_2 x_3 x_4	u_1 u_2	v_1 v_2 v_3 v_4	ξ_1 ξ_2 ξ_3 ξ_4	η_1 η_2 η_3 η_4	ζ_1 ζ_2 ζ_3
0	η_1	1	−4 0 4 2	−1 −2	1	−1	1	
0	ξ_2	3	0 2 0 4	3 −1	−1	1	−1	
0	ξ_3	2	−4 0 10 0	0 1	−1	1	−1	
0	η_4	7	2 − 4 0 −10	1 −1	1	−1	1	
1	ζ_1	3	1 3* 0 −1	0 0				1 0 −1
0	ζ_2	4	2 −1 1 1	0 0				0 1 0
		3	1 3 0 −1	0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	−1
0	η_1	1	−4 4 2	−1 −2	1	−1	1	0 0
0	ξ_2	1	−2/3 0 14/3	3 −1	−1	1	−1	−2/3 2/3
0	ξ_3	2	−4 10 0	0 1	−1	1	−1	0 0
0	η_4	11	10/3 0 −34/3	1 −1	1	−1	1	4/3 −4/3
0	x_2	1	1/3 1 0 −1/3	0 0				1/3 1 −1/3
0	ζ_2	5	7/3 1 2/3	0 0				1/3 1 −1/3
		0	0 0 0 0	0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0

Variabilele ξ_2 ξ_3 η_1 și η_4 aparțin bazei optime și în faza recursivă pot fi redefinite. Astfel, $\eta_1 = Z_1$; $\zeta_2 = Z_2$; $\zeta_3 = Z_3$; $\eta_4 = Z_4$, încît avem:

Faza recursivă. Să se minimizeze.

$$Z = \sum_{j=1}^{4} Z_j, \qquad \text{(VI.5.32)}$$

cu respectarea condițiilor:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & u_1 & u_2 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & & & 2 & -1 & -2 & 1 & & & & 1 & & & & & 0 \\ -2/3 & & & 14/3 & 3 & -1 & & -1 & & & & 1 & & & & 2/3 \\ -4 & & & 0 & 0 & 1 & & & -1 & & & & 1 & & & 0 \\ 10/3 & & & -34/3 & 1 & -1 & & & & 1 & & & & 1 & & -4/3 \\ 1/3 & 1 & & -1/3 & 0 & 0 & & & & & & & & & 1 & -1/3 \\ 7/3 & & 1 & 2/3 & 0 & 0 & & & & & & & & & & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ x_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

Redefinirea variabilelor nu este necesară și iterațiile pentru optimizarea funcției obiectiv din faza recursivă se pot face în continuarea tabelului simplex pentru faza inițială, după ce au fost recalculați factorii relativi de cost pentru funcția (VI.5.32) și șterse coloanele ξ_1, ξ_4, η_2, η_3 și ζ_1. Vom reda numai tabelul factorilor relativi de cost.

Tabelul factorilor relativi de cost în faza recursivă

(171)

Iterația	Variabilele															
	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	u_2	v_1	v_2	v_3	v_4	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	ζ_2	ζ_3
0	− 16/3	0	14*	−14/3	3	− 3	1	−1	−1	1	0	0	0	0	0	−2/3
1	4/15	0	0	−14/3	3*	−22/5	1	−1	2/5	1	0	0	−7/5	0	0	−2/3
2	14/5	0	0	−28/3	0	−17/5	1	0	2/5	1*	0	−1	−7/5	0	0	−4/3
3	−118/45	0	0	32/9	0	−41/15	1*	−1/3	2/5	0	0	−2/3	−7/5	−1	0	2/9
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	−1	−1	0	0

În tabelul (171) s-au marcat cu asterisc factorii relativi de cost asociați variabilei care intră în bază cu iterația corespunzătoare. Redăm de asemenea:

(172)

Variabilele din bază, soluție și valoarea funcției obiectiv în iterația				
0	1	2	3	4
$Z_1 = 1$ $Z_2 = 1$ $Z_3 = 2$ $Z_4 = 11$ $x_2 = 1$ $\zeta_2 = 5$	$Z_1 = 1/5$ $Z_2 = 1$ $x_3 = 1/5$ $Z_4 = 11$ $x_2 = 1$ $\zeta_2 = 24/5$	$Z_1 = 8/15$ $u_1 = 1/3$ $x_3 = 1/5$ $Z_4 = 32/3$ $x_2 = 1$ $\zeta_2 = 24/5$	$Z_1 = 8/15$ $u_1 = 1/3$ $x_3 = 1/5$ $v_4 = 32/3$ $x_2 = 1$ $\zeta_2 = 24/5$	$v_1 = 8/15$ $u_1 = 1/3$ $x_3 = 1/5$ $v_4 = 32/3$ $x_2 = 1$ $\zeta_2 = 24/5$
$Z = 15$	$Z = 12\ 1/5$	$Z = 11\ 1/4$	$Z = 8/15$	$Z = 0$

Soluția optimă a problemei propuse este

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 1/5 \quad x_4 = 0$$

și

$$\min f(x) = -3$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 6. O TRANSFORMARE A PROBLEMELOR DE PROGRAMARE PĂTRATICĂ [61, 62]

Fie dată o funcţie $f(x)$ şi m funcţii $g_i(x)$ definite pentru orice vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ din spaţiul R^n. Funcţia $f(x)$ este omogenă de gradul α în raport cu componentele vectorului x şi funcţiile $g_i(x)$ sînt omogene respectiv de gradul α_i în raport cu aceleaşi mărimi. Se admite de asemenea că atît funcţia $f(x)$ cît şi funcţiile $g_i(x)$ sînt derivabile pentru orice $x \in R^n$.

Se cer extremele funcţiei $f(x)$ supuse condiţiilor

$$g_i(x) = a_i \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{VI.6.1}$$

Pentru rezolvarea problemei propuse se poate folosi metoda multiplicatorilor Lagrange. Vom construi deci funcţia

$$F(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(x) - a_i]. \tag{VI.6.2}$$

Vectorul soluţie x şi vectorul $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ trebuie să satisfacă sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0; \quad j = 1, \ldots, n, \tag{VI.6.3}$$

$$g_i(x) = a_i \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Valoarea funcţiei $f(x)$ în punctul de extremum se poate exprima în funcţie de vectorul λ. Pentru aceasta, se înmulţesc primele n ecuaţii din sistemul (VI.6.3) cu x_j, se însumează produsele obţinute şi ţinînd seama de identitatea lui Euler pentru funcţiile omogene avem

$$\alpha f(x) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i g_i(x) = 0. \tag{VI.6.4}$$

Dacă $\bar{x}$ este o soluţie a sistemului (VI.6.3), $g_i(\bar{x}) = a_i$, deci

$$\alpha f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i a_i = 0, \tag{VI.6.5}$$

de unde rezultă că valoarea funcţiei $f(x)$ în punctul de extremum $\bar{x}$ este

$$f(\bar{x}) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i a_i. \tag{VI.6.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Reţinînd acest rezultat se propune următoarea problemă de programare patratică:

Să se determine minimul formei pătratice definită pozitiv

$$f(x) = \frac{1}{2} x' Cx, \tag{VI.6.7}$$

cu condiţiile

$$Ax \geqslant b. \tag{VI.6.8}$$

Problema propusă poate fi redusă la o problemă de programare pătratică echivalentă, în care sistemul de restricţii pe care trebuie să le satisfacă vectorul x este mai simplu.

În acest scop se înlocuiesc restricţiile (VI.6.8) prin condiţiile

$$Ax = u, \tag{VI.6.9}$$

$$u \geqslant b. \tag{VI.6.10}$$

Pentru un vector u determinat,

$$\min f(x) = \frac{1}{2} x'Cx \tag{VI.6.11}$$

cu condiţiile

$$Ax = u, \tag{VI.6.12}$$

se găseşte folosind rezultatul din egalitatea (VI.6.6), în care $\alpha = 2$; $\alpha_i = 1$, pentru $i = 1, \ldots, m$ şi $a_i = u_i$. Astfel avem

$$\min f(x) = f(\bar{x}) = \sum_i \lambda_i u_i = u'\lambda, \tag{VI.6.13}$$

unde $\bar{x}$ este o soluţie a sistemului (VI.6.9) pentru u dat;

u' — transpusul vectorului-coloană $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$;

λ — vectorul-coloană format din multiplicatorii Lagrange care verifică condiţiile (VI.6.3). Aceste condiţii scrise sub forma

$$\nabla f(x) - \nabla g(x) \cdot \lambda = 0$$

dau, pentru $f(x) = \frac{1}{2} x'Cx$ şi $g(x) = Ax$, relaţia

$$Cx = A'\lambda. \tag{VI.6.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulţind la stînga ecuaţia (VI.6.14) cu C^{-1}, avem

$$\bar{x} = C^{-1} \cdot A' \lambda. \qquad \text{(VI.6.15)}$$

Înlocuind această expresie a vectorului $\bar{x}$ în (VI.6.12), găsim

$$(AC^{-1}A')\lambda = u,$$

deci $\lambda = (AC^{-1}A')^{-1}u$ sau, notînd $(AC^{-1}A')^{-1} = K$,

$$\lambda = Ku. \qquad \text{(VI.6.16)}$$

Funcţia obiectiv exprimată cu ajutorul vectorului u se găseşte înlocuind pe λ în (VI.6.13). Găsim

$$f(u) = u'Ku. \qquad \text{(VI.6.17)}$$

Matricea C fiind o matrice simetrică definită pozitivă, C^{-1} are aceleaşi proprietăţi, încît, dacă A este o matrice nedegenerată, matricea $AC^{-1}A'$ şi inversa ei $(AC^{-1}A')^{-1}$ au aceleaşi proprietăţi (v. § 3). În acest fel, problema de programare pătratică (VI.6.7) — (VI.6.8) se înlocuieşte cu problema echivalentă de programare pătratică: să se determine minimul formei pătratice definită pozitiv

$$f(u) = u'Ku, \qquad \text{(VI.6.18)}$$

cu condiţiile

$$u \geqslant b. \qquad \text{(VI.6.19)}$$

Noua problemă prezintă avantajul de a avea sistemul de restricţii mai simplu decît al problemei iniţiale. Dacă numărul m al restricţiilor este mai mic decît numărul n al componentelor vectorului x (cazul cel mai frecvent în problemele de programare), noua problemă are mai puţine variabile decît problema originală, deoarece numărul componentelor vectorului u este egal cu numărul restricţiilor.

Fie u soluţia modelului (VI.6.18) — (VI.6.19). Soluţia $\bar{x}$ pentru modelul (VI.6.7) — (VI.6.8) se calculează din (VI.6.15) înlocuind pe λ cu valoarea dată de (VI.6.16), deci avem

$$\bar{x} = C^{-1}A'K\bar{u}. \qquad \text{(VI.6.20)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplul I. Să se determine minimul funcţiei

$$f(x) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + x_4^2$$

cu condiţiile

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad &\geqslant 1, \\ x_2 \quad + x_4 &\geqslant 1, \\ 2x_1 + x_2 \quad &\geqslant 2, \\ x_3 + 2x_4 &\geqslant 3. \end{aligned}$$

Vom transforma această problemă într-una de tipul (VI.6.18) — (VI.6.19). Forma, patratică $f(x)$ este evident definită pozitiv, fiindcă este suma pătratelor a patru forme liniare, liniar independente. Matricea sistemului de restricţii este nedegenerată. Avem

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$AC^{-1}A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 17 & 8 \\ 7 & 6 & 12 & 7 \\ 17 & 12 & 31 & 12 \\ 8 & 7 & 12 & 10 \end{bmatrix};$$

$$K = (AC^{-1}A')^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 53 & 34 & -31 & -29 \\ 34 & 50 & -26 & -31 \\ -31 & -26 & 20 & 19 \\ -29 & -31 & 19 & 23 \end{bmatrix}.$$

Funcţia obiectiv a problemei transformate este

$$f(u) = u'Ku,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci, pentru exemplul studiat, avem

$$f(u) = \frac{1}{9}(53u_1^2 + 50u_2^2 + 20u_3^2 + 23u_4^2 + 68u_1u_2 - 62u_1u_3 -$$

$$- 58u_1u_4 - 52u_2u_3 - 62u_2u_4 + 38u_3u_4).$$

Restricţiile impuse vectorului u sînt

$$u_1 \geqslant 1\,;\ u_2 \geqslant 4\,;\ u_3 \geqslant 2\,;\ u_4 \geqslant 3.$$

În cadrul acestui paragraf se va expune o metodă de rezolvare a acestui tip de probleme de programare pătratică.

Revenind la tema transformării unei probleme de programare pătratică, o reluăm sub forma mai generală

$$\min f(x) = x'Cx + Lx, \qquad \text{(VI.6.21)}$$

cu condiţiile

$$Ax \geqslant a, \qquad \text{(VI.6.22)}$$

unde C este o matrice definită pozitiv, $L = (l_1, \ldots, l_n)$ un vector-linie cunoscut şi A o matrice nedegenerată de dimensiuni $m \times n$. Relaţiile (VI.6.22) se înlocuiesc cu

$$Ax = u, \qquad \text{(VI.6.23)}$$

$$u \geqslant a. \qquad \text{(VI.6.24)}$$

Pentru un u determinat, extremele funcţiei (VI.6.21), cu condiţiile (VI.6.23), se găsesc scriind funcţia

$$F(x, \lambda) = f(x) - (Ax - u)'\lambda \qquad \text{(VI.6.25)}$$

[unde $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ este vectorul m — dimensional ale cărui componente sînt multiplicatorii Lagrange] şi determinînd vectorii x şi λ care satisfac sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \text{(VI.6.26)}$$

$$Ax = u. \qquad \text{(VI.6.27)}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile (VI.6.26) se mai pot scrie:

$$\nabla f(x) - \nabla(Ax - u)'\lambda = 0$$

sau

$$\nabla f(x) - A'\lambda = 0. \tag{VI.6.28}$$

Pentru $f(x) = x'Cx + Lx$ avem

$$\nabla f(x) = Cx + L'. \tag{VI.6.29}$$

Astfel, ecuațiile (VI.6.28), în care $\nabla f(x)$ este dat de (VI.6.29), sînt

$$Cx + L' = A'\lambda$$

sau

$$Cx = A'\lambda - L',$$

de unde

$$x = C^{-1}A'\lambda - C^{-1}L'. \tag{VI.6.30}$$

Punînd condiția ca $\bar{x}$ să satisfacă ecuația (VI.6.27), avem

$$(AC^{-1}A')\lambda - AC^{-1}L' = u,$$

deci

$$\lambda = (AC^{-1}A')^{-1}u + (AC^{-1}A')^{-1}AC^{-1}L'$$

sau, dacă notăm $(AC^{-1}A')^{-1} = K$, atunci

$$\lambda = Ku + KAC^{-1}L'. \tag{VI.6.31}$$

Pentru a găsi expresia funcției obiectiv în vectorul u, se înmulțește relația (VI.6.28) la stînga cu x și se aplică identitatea lui Euler. Funcția $f(x)$ fiind suma unei funcții omogene de gradul al doilea cu o funcție omogenă de gradul întîi,

$$x\nabla f(x) = 2x'Cx + Lx,$$

deci din relația (VI.6.28) obținem

$$2x'Cx + Lx = xA'\lambda$$

sau, adunînd în ambii membri Lx și înlocuind $xA' = u'$, avem

$$2f(x) = u'\lambda + Lx. \tag{VI.6.32}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din expresia lui x şi a funcţiei $f(x)$ se poate elimina λ, înlocuindu-l prin valoarea dată de (VI.6.31). Astfel, din relaţia (VI.6.30) avem

$$x = C^{-1}A'[Ku + KAC^{-1}L'] - C^{-1}L' =$$

$$= C^{-1}A'Ku + C^{-1}A'KAC^{-1}L' - C^{-1}L'.$$

Notăm $C^{-1}A'K = M$ şi $MAC^{-1}L' - C^{-1}L' = H$ şi avem

$$x = Mu + H. \qquad \text{(VI.6.33)}$$

Înlocuind acum λ şi x în (VI.6.32) prin valorile lor din (VI.6.31) şi (VI.6.33), găsim

$$2f(u) = u'Ku + u'KAC^{-1}L' + LMu + LH.$$

Deoarece u' este o matrice de dimensiuni $1 \times m$ şi L' o matrice de dimensiuni $m \times 1$, matricea $u'KAC^{-1}L'$ este formată dintr-un singur element şi deci egală cu traspusa ei, sau

$$u'KAC^{-1}L' = (u'KAC^{-1}L')' = LC^{-1}A'Ku = LMu.$$

Funcţia obiectiv se poate scrie acum

$$2f(u) = u'Ku + 2LMu + LH$$

şi astfel problema iniţială se înlocuieşte cu următoarea: să se determine minimul funcţiei

$$\varphi(u) = u'Ku + 2LMu, \qquad \text{(VI.6.34)}$$

cu condiţiile

$$u \geqslant a. \qquad \text{(VI.6.35)}$$

Soluţia optimă pentru problema iniţială se găseşte înlocuind vectorul-soluţie al problemei transformate în egalitatea (VI.6.33).

Se vede cu uşurinţă că pentru cazul particular $L = 0$ modelul (VI.6.34) — (VI.6.35) se reduce la modelul (VI.6.18) — (VI.6.19).

În încheiere vom da cîteva exemple de probleme de programare patratică, aduse la forma

$$\min f(u),$$

cu condiţiile $u \geqslant a$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru rezolvarea acestor exemple ne vom baza pe următoarele considerații:

— funcția $f(u)$ este minimă pentru $u = a$ dacă $\nabla f(a) \geqslant 0$;

— dacă $\frac{\partial f(a)}{\partial u_j} \leqslant 0$ pentru un număr de k variabile cu indicii $j = \{j_1, \ldots, j_k\} = J$ aparținînd mulțimii $\{1, \ldots, n\} = N$, poate descreşte cînd $u_{j_1} > a_{j_1}, \ldots, u_{j_k} > a_{j_k}$.

Rezolvînd sistemul de ecuații liniare

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u_j} = 0 \; j \in J, \tag{VI.6.36}$$

în care u_j, $j \in J$ sînt variabile, și

$$u_j = a_j \text{ dacă } j \in N - J,$$

se pot prezenta două situații:

a) Soluția sistemului (VI.6.36) satisface condițiile (VI.6.35) dacă

$$u_j = \hat{a}_j > a_j \text{ pentru toți } j \in J.$$

În acest caz, vectorul $\hat{u}$, cu componentele

$$u_j = \hat{a}_j \quad \text{pentru } j \in J,$$

$$u_j = a_j \quad \text{pentru } j \in N - J,$$

este o soluție a sistemului de restricții. Dacă $\nabla f(\hat{u}) \geqslant 0$, $\hat{u}$ este soluția optimă. În caz contrar se aplică din nou același procedeu pentru determinarea unui nou vector u.

b) Soluția sistemului (VI.6.36) nu satisface condițiile (VI.6.35) dacă

$$u_j = \hat{a}_j < a_j \text{ pentru cel puțin un } j \in J.$$

Fie $j \in \{j_1, \ldots, j_s\} = J_s$ indicii acestor variabile. În acest caz se rezolvă sistemul de ecuații liniare

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u_j} = 0 \; j \in J - J_s,$$

Scanned with OKEN Scanner

în care u_j, $j \in J - J_s$ sînt variabile, și

$$u_j = a_j \text{ pentru } j \in N - \{J - J_s\}.$$

Dacă acest sistem are o soluție care satisface (VI.6.35) se construiește vectorul $\hat{u}$ pentru care se testează optimalitatea.

Exemplul II.

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1 x_2 + 6x_1 x_3 - 2x_2 x_3$$

cu condițiile

$$x_1 \geqslant 1\,;\; x_2 \geqslant 2\,;\; x_3 \geqslant 2.$$

Se calculează derivatele:

$$1/2 \frac{\partial f}{\partial x_1} = 10x_1 - 2x_2 + 3x_3,$$

$$1/2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1 + 5x_2 - x_3,$$

$$1/2 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 3x_1 - x_2 + 2x_3.$$

Valorile derivatelor pentru $\bar{x} = (1, 2, 2)$ sînt

$$1/2 \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} = 12\,; \qquad 1/2 \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} = 6\,; \qquad 1/2 \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_3} = 5.$$

Derivatele fiind pozitive în $\bar{x}$, funcția $f(x)$ este minimă pe mulțimea soluțiilor sistemului de restricții pentru $x = \bar{x}$, deci $x_1 = 1\,;\; x_2 = 2\,;$ $x_3 = 2$, este soluția optimă și $\min f(x) = 34$.

Exemplul III.

$$\min f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 3x_4^2 - 4x_1 x_2 - \\ - 4x_1 x_4 + 2x_2 x_4 - 6x_3 x_4,$$

cu condițiile

$$x_1 \geqslant 3,\; x_2 \geqslant 1\,;\; x_3 \geqslant 1\,;\; x_4 \geqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivatele funcției $f(x)$ sînt

$$1/2\frac{\partial f}{\partial x_1} = \quad 3x_1 - 2x_2 \qquad - 2x_4,$$

$$1/2\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1 + 5x_2 \qquad + \quad x_4,$$

$$1/2\frac{\partial f}{\partial x_3} = \qquad\qquad 6x_3 - 3x_4,$$

$$1/2\frac{\partial f}{\partial x_4} = -2x_1 + \quad x_2 - 3x_3 + 3x_4.$$

Valorile derivatelor în punctul $M_0(3,\ 1,\ 1,\ 1)$ sînt

$$1/2\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} = 5\,; \quad 1/2\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} = 0\,; \quad 1/2\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_3} = 3\,; \quad 1/2\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_4} = -4.$$

Deoarece $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_4} < 0$, funcția descrește cînd x_4 crește; însă, deoarece $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} = 0$, vom considera și posibilitatea de deplasare a punctului M_0 pe direcția x_2. Menținînd $x_1 = 3$; $x_3 = 1$ formăm sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \text{ deci } -6 + 5x_2 + x_4 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \text{ deci } -9 + x_2 + 3x_4 = 0.$$

Soluția sistemului este $x_2 = \frac{9}{14}$; $x_4 = \frac{39}{14}$. Deoarece $x_2 < 1$, această soluție nu satisface condițiile problemei. Se consideră atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \text{ adică } -8 + 3x_4 = 0 \quad x_4 = \frac{8}{3},$$

și se obține astfel punctul $M_1\left(3,\ 1,\ 1,\ \frac{8}{3}\right)$.

Calculînd valorile derivatelor în punctul M_1, găsim

$$1/2\frac{\partial f(M_1)}{\partial x_1} = \frac{5}{3}\,; \quad 1/2\frac{\partial f(M_1)}{\partial x_2} = \frac{5}{3}\,; \quad 1/2\frac{\partial f(M_1)}{\partial x_3} = -2\,; \quad 1/2\frac{\partial f(M_1)}{\partial x_4} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece derivata în raport cu x_3 este negativă şi în raport cu x_4 nulă, vom considera variaţiile pe această direcţie. În punctele (3, 1, x_3, x_4) trebuie să avem

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \text{ adică } 2x_3 - x_4 = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \text{ adică } -5 - 3x_3 + 3x_4 = 0.$$

Soluţia acestui sistem fiind $x_3 = \frac{5}{3}$; $x_4 = \frac{10}{3}$, punctul $M_2\left(3, 1, \frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$ se găseşte în domeniul soluţiilor realizabile. Calculînd valorile derivatelor în acest punct, găsim

$$1/2\frac{\partial f(M_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{3}; \quad 1/2\frac{\partial f(M_2)}{\partial x_3} = \frac{7}{3}; \quad 1/2\frac{\partial f(M_2)}{\partial x_3} = 0; \quad 1/2\frac{\partial f(M_2)}{\partial x_4} = 0.$$

Toate derivatele fiind nenegative, funcţia nu poate lua valori mai mici cînd punctul se deplasează în domeniul soluţiilor realizabile ale sistemului de restricţii, deci soluţia problemei este vectorul x^* (3, 1, 5/3, 10/3) şi valoarea minimă a funcţiei $f(x)$ în condiţiile date este $f(x^*) = \frac{10}{3}$.

Exemplul IV. Se cere minimizarea funcţiei $f(x)$ din exemplul II, cu condiţiile

$$x_1 \geqslant 1; \; x_2 \geqslant 1; \; x_3 \geqslant 1; \; x_4 \geqslant 3.$$

Valorile derivatelor în $M_0(1, 1, 1, 3)$ sînt

$$1/2\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} = -5; \quad 1/2\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} = 6; \quad 1/2\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_3} = -3; \quad 1/2\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_4} = 5.$$

Funcţia are derivate negative pe direcţiile x_1 şi x_3, deci considerăm punctele (x_1, 1, x_3, 3) în care se ia

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \text{ adică } 3x_1 - 8 = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \text{ adică } 6x_3 - 9 = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluţia sistemului este $x_1 = 8/3$; $x_3 = 3/2$, deci ne deplasăm în punctul $M_1(8/3, 1, 3/2, 3)$. Valorile derivatelor în acest punct sînt

$$1/2\,\frac{\partial f(M_1)}{\partial x_1} = 0\,; \quad 1/2\,\frac{\partial f(M_1)}{\partial x_2} = \frac{8}{3}\,; \quad 1/2\,\frac{\partial f(M_1)}{\partial x_3} = 0\,; \quad 1/2\,\frac{\partial f(M_1)}{\partial x_4} = \frac{1}{6}\,.$$

Derivatele funcţiei fiind nenegative în M_1, soluţia optimă este $x^*(8/3, 1, 3/2, 3)$ şi valoarea minimă a funcţiei este $f(x^*) = \frac{19}{6}$.

Exemplul V.

$$\min f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = x_1^2 + 2\,x_2^2 + 17\,x_3^2 + 2\,x_4^2 - 2\,x_1x_2 - 8\,x_2x_3 - 2\,x_3x_4,$$

cu condiţiile

$$x_1 \geqslant 1\,; \; x_2 \geqslant 2\,; \; x_3 \geqslant 3\,; \; x_4 \geqslant 1.$$

Derivatele funcţiei $f(x)$ sînt:

$$1/2\,\frac{\partial f}{\partial x_1} = \quad x_1 - \quad x_2,$$

$$1/2\,\frac{\partial f}{\partial x_2} = -\,x_1 + 2x_2 - \quad 4x_3,$$

$$1/2\,\frac{\partial f}{\partial x_3} = \quad -\,4x_2 + 17x_3 - \quad x_4,$$

$$1/2\,\frac{\partial f}{\partial x_4} = \quad -\,x_3 + 2x_4.$$

Valorile derivatelor în punctul M_0 (1,2,3,1) sînt

$$1/2\,\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} = -\,1\,; \quad 1/2\,\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} = -9\,; \quad 1/2\,\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_3} = 42\,; \quad 1/2\,\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_3} = -\,1,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci funcţia creşte pe direcţiile x_1, x_2, x_4 pînă cînd derivatele se anulează în punctele x (x_1, x_2, 3, x_4). Astfel avem :

$$1/2\ \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \text{ deci } \quad x_1 - x_2 = 0,$$

$$1/2\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad ,, \quad -x_1 + 2x_2 = 12,$$

$$1/2\ \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \quad ,, \quad 2x_4 = 3.$$

Soluţia acestui sistem este $x_1 = x_2 = 12$, $x_4 = 3/2$, deci ne găsim acum în punctul M_1 (12, 12, 3, 3/2). Valorile derivatelor în acest punct sînt

$$1/2\ \frac{\partial f(M_1)}{\partial x_1} = 0\,; \quad 1/2\ \frac{\partial f(M_1)}{\partial x_2} = 0\,; \quad 1/2\ \frac{\partial f(M_1)}{\partial x_3} = \frac{3}{2}\,; \quad 1/2\ \frac{\partial f(M_1)}{\partial x_4} = 0,$$

deci x^* (12, 12, 3, 3/2) este soluţia optimă.

Exemplul VI.

$$\min f(x_1x_2x_3x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_4$$

cu condiţiile

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad &\geqslant 1, \\ x_2 \quad + \quad x_4 \quad &\geqslant 4, \\ 2x_1 + x_2 \quad &\geqslant 2 \\ x_3 + 2x_4 \quad &\geqslant 3, \\ x_i \geqslant 0 \quad i = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$

În exemplul I din acest paragraf s-a arătat că problema propusă se transformă în

$$\min f\,(u_1\,u_2,\,u_3\,u_4) = 1/9\ (53\,u_1^2 + 50\,u_2^2 + 20\,u_3^2 + 23\,u_4^2 + \\ + 68\,u_1u_2 - 62\,u_1\,u_3 - 58\,u_1u_4 - 52u_2\,u_3 - 62\,u_2u_4 + 38\,u_3u_4),$$

cu condiţiile

$$u_1 \geqslant 1\,;\ u_2 \geqslant 4\,;\ u_3 \geqslant 2\,;\ u_4 \geqslant 3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivatele funcției $f(u)$ sînt

$$9/2\,\frac{\partial f}{\partial u_1} = 53\,u_1 + 34\,u_2 - 31\,u_3 - 29\,u_4,$$

$$9/2\,\frac{\partial f}{\partial u_2} = 34\,u_1 + 50\,u_2 - 26\,u_3 - 31\,u_4,$$

$$9/2\,\frac{\partial f}{\partial u_3} = -31\,u_1 - 26\,u_2 + 20\,u_3 + 19\,u_4,$$

$$9/2\,\frac{\partial f}{\partial u_4} = -29\,u_1 - 31\,u_2 + 19\,u_3 + 23\,u_4.$$

Valorile derivatelor în punctul M_0 (1,4,2,3) sînt

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial u_1} > 0\,; \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial u_2} > 0\,; \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial u_3} < 0\,; \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial u_4} < 0,$$

deci funcția descreşte în direcțiile u_3 şi u_4. Să considerăm totuşi variația funcției numai cînd u_3 creşte deci în punctele $u(1, 4, u_3, 3)$ luînd $9/3\,\frac{\partial f}{\partial u_3} = 0$ adică $20\,u_3 - 78 = 0$ avem $u_3 = 3{,}9$ şi considerăm punctul (M_1 (1 ; 4 ; 3,9 ; 3), în care găsim

$$\frac{\partial f(M_1)}{\partial u_1} < 0\,; \quad \frac{\partial f(M_1)}{\partial u_2} > 0\,; \quad \frac{\partial f(M_1)}{\partial u_3} = 0\,; \quad \frac{\partial f(M_1)}{\partial u_4} < 0.$$

Vom considera acum punctele $u(u_1, 4, u_3, u_4)$ şi sistemul de ecuații

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = 0, \text{ deci } \quad 53\,u_1 - 31\,u_3 - 29\,u_4 = -136\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_3} = 0, \text{ deci } \quad -31\,u_1 + 20\,u_3 + 19\,u_4 = \quad 104\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_4} = 0, \text{ deci } \quad -29\,u_1 + 19\,u_3 + 23\,u_4 = \quad 124.$$

Soluția acestui sistem este $u_1 = 4\frac{2}{3}$; $u_3 = 8$; $u_4 = 4\frac{2}{3}$ şi astfel s-a determinat punctul $M_2\left(4\frac{2}{3}\,;\,4\,;\,8\,;\,4\frac{2}{3}\right)$. Valorile derivatelor în acest punct sînt nenegative, deci $u^*\left(4\frac{2}{3}\,;\,4;8;4\frac{2}{3}\right)$ este soluția optimă a problemei transformate. Soluția x^* pentru problema ini-

țială se poate calcula cu ajutorul formulei (VI. 6. 20) sau, mai simplu, din sistemul

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad &= 4\frac{2}{3}, \\ x_2 \quad + \quad x_4 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 \quad &= 8, \\ x_3 + 2x_4 &= 4\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Se găsește

$$x^* \ (8/3,\ 8/3,\ 2,\ 4/3).$$

Din cele expuse în capitolul de programare neliniară reiese, în primul rînd, că dificultățile pe care le comportă rezolvarea problemelor de programare neliniară sînt incomparabil mai mari decît cele implicate de rezolvarea problemelor de programare liniară. În al doilea rînd se remarcă lipsa unei metode unice de tratare a acestor probleme.

Ca observație finală vom sublinia faptul că acest domeniu polarizează interesul multor matematicieni. Apar mereu metode noi și noi încercări de programare a algoritmelor pe mașinile electronice de calcul, care constituie îmbunătățiri în procedeele de rezolvare a diferitelor tipuri de probleme de programare neliniară. Interesul pentru această temă este justificat de numărul mare și de importanța aplicațiilor sale practice.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Abadie, J., *Un nouvel algorithm pour P.L. Le principe de décomposition de Dantzig et Wolfe.* În „Revue française de Recherche opérationnelle", 1961.
2. Ackoff, L. Russell, *Progress in Operation Research.* J. Wiley London, 1961.
3. Alter, M., Miasnicov, I., Rădulescu, M., Rădulescu, D., *Aplicații ale metodelor matematice în probleme de repartiție,* Editura Științifică, București, 1964.
4. Arrow and Karlin, *Studies in applied Probability and Mangement Science,* Stanford University Press, Stanford California, 1962.
5. Babbar, M. M., *Distribution of Solutions of a Set of Linear Equations (with Applications to Linear Programming).* În „J. American Statistical Association" vol. 50, 1955.
6. Barankin, E. W. and Dorfman R., *On Quadratic Programming,* University of California Press, Berkeley, 1958.
7. Beale, E. M. L., *On Optimizing a Convex Function Subject to Linear Inequalities.* În „Journal of Royal Statistical Society" nr. 17, 1955.
8. Beale, E. *Cycling in the dual simplex algorithm.* În „Naval Research Logistics" vol. 2, nr. 4, 1955.
9. Berge, C., *Théorie des graphes et ses applications,* Dunod, Paris, 1958.
10. Berge, C. et Ghonila-Honri, *Programmes, Jeux et Réseaux de Transport,* Dunod, Paris 1962.
11. Bereanu, B., *Unele aplicații ale programării stochastice în planificare.* În „Studii de statistică", 1963.
12. Bereanu, B., *On stochastic linear programming I. Distribution problems: a singh random variable.* În „Revue de mathématiques pures et appliquées", tom. VIII, nr. 4, 1963.
13. Boot, G. G., *Quadratic Programming,* North Holand Co., Amsterdam, 1964.
14. Charnes, A., *Optimality and Degeneracy in Linear Programming.* În „Econometrica", vol. 20, nr. 2/1952.
15. Charnes, A., Cooper, W. and Henderson, A., *An introduction to Linear Programming,* Viley and Chapman, Hall 1953.
16. Charnes, A., and Lemke, C., *Minimization of Nonlinear Separable Convex Functionals.* În „Naval Research Logistics Quaterley", nr. 1, 1954.
17. Charnes, A. and Cooper, W., *Chance—constrained programming.* În „Management Science", vol. 6, nr. 2, 1960.
18. Chorafas, L., *Nouvelles méthodes d'analyse économique,* Dunod, Paris, 1963.
19. Chung An-Min, *Linear Programming,* Columbus-Ohio, 1963.
20. Creangă, I. și Haimovici, C., *Algebra Liniară,* Editura Didactică și Pedagogică, București, 1962.
21. Datzig, G. B., *Linear Programming and Extensions,* Princeton-University Press 1963, New York.
22. Dantzig, G. B., *Recent Advances in Linear Programming.* În „Management Science", vol. 2, nr. 2, 1956.
23. Dantzig, G. B., *On the Shortest Route through a Network.* În „Management Science", vol. 6, nr. 2, 1960.

Scanned with OKEN Scanner

24. Dantzig, G. B. et Orden, A. et Wolfe, P., *The Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form under Linear Inequality Restraints.* În „Pacific Journal of Mathematics", vol. 5, nr. 2, 1955.
25. D'Eppenoux, F., *A probabilistic production and inventary probleme.* În „Management Science", vol. 10, n. 1, 1964.
26. D'Esopo, D. A., *A Convex Programming Procedure.* În „Naval Research Logistics Quaterly", nr. 6, 1959.
27. Dumas, A., *L'entreprise et la statistique,* Dunod, Paris, 1963.
28. Elmaghraby, S. E., *An Approach to Linear Programming under Uncertainty.* În „Operations Research", vol. 7, nr. 1, 1959.
29. Elmaghraby, S. E., *Allocation under Uncertainty when the Demand has Continous D. F.* În „Management Science", vol. 6, nr. 3, 1960.
30. Fischer, J., *A class of stochastic Investment Problems.* În „Operations Research", vol. 9, nr. 1, 1961.
31. Ford, J. K. and Fulkerson, D. R., *Flows in Networks,* Princeton University Press 1962, New York.
32. Fulkerson, D. R. *A Network Flow Feasibility Theorem and Combinatorial Applications.* În „Canadian Journal Mathematic", nr. 11, 1959.
33. Garvin, W., *Introduction to Linear Programming,* Mc. Graw-Hill Book Col, New-York, 1960.
34. Gass, S., *Linear Programming, Methods and Applications,* Mc. Graw-Hill Book Co., New-York, 1958.
35. Graves, R. L. and Wolfe, Ph. (Ed.), *Recent advances in Mathematical Programming,* Mc. Graw-Hill Book Co., London, 1963.
36. Greenwald Dakota Ulrich, *Linear Programming,* The Ronald Press Company, New York, 1959.
37. Hadley, G., *Linear Programming. Addison-Wesley.* Publishing Co., New-York, 1959.
38. Hadley, G., *Nonlinear and Dinamic Programming Addison-Wesley,* Publishing Co., London, 1964.
39. Kaufmann, A. et Desbazeille, G., *La méthode du chemin critique,* Dunod, 1964.
40. Haley, K. B., *The solid transportation problems.* În „Operations Research", vol. 10, 4, 1962.
41. Hildreth, G. G., *A Quadratic Programming Procedure.* În „Naval Research Logistics Quarterley", nr. 4, 1957.
42. Hoffman, A., *Cycling in the simplex algorithm,* Mational Bireau of Statistics Rep. D. C. 1953.
43. Houthakker, H., *The Capacity Method of Quadratic Programming.* În „Econometrica", nr. 28, 1960.
44. Ionescu, H., Mirescu, P., Nădejde I., *Programarea liniară,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1964.
45. Iosifescu, M. şi Theodorescu, R., *Aspecte stochastice ale programării liniare.* În „Studii de statistică", 1962.
46. Kelley, J. E., *Parametric Programming and the Primal-Dual Algorithm.* În „Operations Research", vol. 7, nr. 3, 1959.
47. Kuhn, H. W. and Tucker, A. W., *Nonlinear Programming,* Proceedings Second Berkeley Simposium on Mathematical Statistics and Probability, 1951.
48. Künzi, H. P., *Nichtlineare Programmierung.* În „Zeitschift für Angewaredte Mathematick und Mechanick", nr. 41, 1961.
49. Lemke, C. E., *The dual method of solving the linear programming problems,* Nava Research Logistics Quartley, nr. 1, 1954.
50. Lupescu, T., Roşu, A., Cerchez, M., *Programare matematică,* Editura Militară, Bucureşti, 1965.

Scanned with OKEN Scanner

51. Madansky, A., *Inequalities for stochastic linear programming problems.* În „Management Science", vol. 6, nr. 2, 1960.
52. Mainiè, P., *Application des Programmes linéaires paramétriques au choix des investissements dans une exploitation fruitière.* În „Revue Française de Recherche Opérationnelle", vol. 27, 1963, trim. 2.
53. Manne, H. S., *A note on the Modigliano — Hohn production smoothing model.* În „Management Science", vol. 3, nr. 3, 1957.
54. Markowitz, H., *Concepts and Computing Procedures for Certain Programming Problems*, Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming, Ed. Antosiewicz H. A., vol. 2, 1954.
55. Markowitz, H., *The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints.* În „Naval Logistics Quarterley", nr. 3, 1956.
56. Maurin, H., *Paramétrisation générale d'un programme linéaire.* În „Revue Française de Recherche Opérationnelle", vol. 32, 1965, trim. 3.
57. Mihăilă, N., *Introducere în programarea liniară.* Editura Didactică și Pedagogică, București, 1964.
58. Mihoc, Gh., *Unele precizări în legătură cu aplicarea programării liniare.* În „Revista de statistică", nr. 12/1959.
59. Mihoc, Gh., Ionescu, H., *Bazele matematice ale programării liniare*, Editura Științifică, București, 1965.
60. Mihoc, Gh. și Urseanu, V., *Matematici aplicate în statistică.* Editura Academiei Republicii Socialiste România, București, 1962.
61. Mocanu, Elena, *Observații asupra rezolvării problemelor de programare patratică.* În „Studii și Cercetări de Matematică", Cluj, tom. XIV, nr. 2, 1963.
62. Mocanu, Elena, *Sur la résolution des problèmes de programmation quadratique.* În „Mathematica", vol. 6, nr. 29, 1964.
63. Mothes, J., *Prévisions et décisions statistiques dans l'entreprise*, Dunod, Paris, 1962.
64. Orden, A., *The transshipment Problem.* În „Management Science", vol. 2, nr. 3, 1956.
65. Saaty, Th., *Coefficient Perturbation of a Constrained Extremum.* În „Operations Research", vol. 7, nr. 3, 1959.
66. Saaty, Th., *Mathematical Methods of Operations Research.* Graw-Hill Book Co., New-York, 1959.
67. Schell, E., *Distribution of a Product by Several Properties.* În „Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming", vol. 2, 1955.
68. Sengupta, J. K., *On some theorems of stochastic linear programming with applications.* În „Management Science", vol. 10, nr. 1, 1964.
69. Simonard, M., *Programmation linéaire*, Dunod, Paris, 1962.
70. Simonard, M. A. et Hadley G. F., *Maximum number of iterations in transportation problems.* În „Naval Logistics Quarterley", vol. 6, nr. 2, 1959.
71. Simons, E., *A note on parametric linear programming.* În „Management Science", vol. 8, nr. 3, 1962.
72. Tintner, G., *A note on stochastic Linear Programming.* În „Econometrica", vol. 29, nr. 2, 1961.
73. Vajda, S., *Readings in Linear Programming*, Sir Isac Pitman, London, 1959.
74. Wagner, H., *A comparation of the original and revised simplex methods.* În „Operations Research", vol. 5, nr. 3, 1957.
75. Wagner, H., *On the Capacited Hitchoock Problem.* În „Menagement Science" vol. 5, nr. 3, 1959.
76. Wiliams, A. C., *A stochastic transportation probleme.* În „Operations Research", vol. 11, nr. 5, 1963.
77. Wolfe, P., *The Simplex Method for Quadratic Programming.* În „Econometrica", nr. 27, 1959.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINSUL

PREFAȚĂ 5

CAPITOLUL I

METODE SIMPLEX

§ 1. INTRODUCERE 7
§ 2. ALGORITMUL PRIMAL SIMPLEX 17
§ 3. METODA SIMPLEX REVIZUITĂ SAU METODA MULTIPLICATORILOR 46
§ 4. DUALITATEA ÎN PROGRAMAREA LINIARĂ 78
§ 5. ALGORITMUL DUAL SIMPLEX 91
§ 6. ALGORITMUL PRIMAL-DUAL 106

CAPITOLUL II

REOPTIMIZARE

§ 1. INTRODUCERE 120
§ 2. CONSIDERAȚII GENERALE 121
§ 3. MODIFICAREA VECTORULUI CONSTANTELOR d 122
§ 4. MODIFICAREA VECTORULUI PREȚURILOR c 130
§ 5. MODIFICAREA UNUI VECTOR-COLOANĂ AL MATRICEI TEHNOLOGICE 136
§ 6. ADĂUGAREA UNOR VECTORI-COLOANĂ ÎN MATRICEA TEHNOLOGICĂ 140
§ 7. MODIFICAREA UNUI VECTOR-LINIE AL MATRICEI TEHNOLOGICE 142
§ 8. ADĂUGAREA UNOR RESTRICȚII SUPLIMENTARE 145
§ 9. CONSIDERAȚII FINALE 149

CAPITOLUL III

PROGRAMAREA PARAMETRICĂ

§ 1. OBIECTUL ȘI IMPORTANȚA PRACTICĂ A PROGRAMĂRII PARAMETRICE 151
§ 2. PARAMETRIZAREA VECTORULUI „CERERE" 153
§ 3. PARAMETRIZAREA VECTORULUI „PREȚURILOR" 177
§ 4. PARAMETRIZAREA ELEMENTELOR MATRICEI TEHNOLOGICE . . . 206
§ 5. PARAMETRIZAREA TUTUROR COEFICIENȚILOR ÎN PROBLEMELE DE PROGRAMARE LINIARĂ 217

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

PROBLEME DE TIP TRANSPORT CU PARAMETRII

§ 1. INTRODUCERE 230
§ 2. TRANSPORTURI CU COSTURI VARIABILE 239
§ 3. TRANSPORTURI CU CERERI ȘI DISPONIBILITĂȚI VARIABILE 247
§ 4. TRANSPORTURI CU CENTRE INTERMEDIARE 255
§ 5. TRANSPORTURI CU CAPACITĂȚI LIMITATE 264
§ 6. PROBLEMA DISTRIBUIRII SARCINILOR 271
§ 7. PROBLEME MULTIDIMENSIONALE DE TRANSPORT 290

CAPITOLUL V

APLICAȚII ALE PROGRAMĂRII PARAMETRICE

§ 1. TRANSFORMAREA PROGRAMELOR NELINIARE ÎN PROGRAME LINIARE PRIN PARAMETRIZARE 304
§ 2. APLICAȚII ALE PROGRAMĂRII LINIARE PARAMETRICE ÎN PROBLEME DE INVESTIȚII 310
§ 3. APLICAȚII ALE PROGRAMĂRII LINIARE PARAMETRICE ÎN ALEGEREA RAȚIILOR FURAJERE 317
§ 4. OPTIMIZAREA COSTULUI UNUI PROIECT, FUNCȚIE DE DURATA PROIECTULUI 322

CAPITOLUL VI

PROGRAMAREA NELINIARĂ

§ 1. INTRODUCERE 338
§ 2. FUNCȚII CONVEXE ȘI CONCAVE 344
§ 3. FORME PĂTRATICE 348
§ 4. TEOREMA KUHN-TUCKER 355
§ 5. METODA SIMPLEX PENTRU REZOLVAREA PROBLEMELOR DE PROGRAMARE PĂTRATICĂ 369
§ 6. O TRANSFORMARE A PROBLEMELOR DE PROGRAMARE PĂTRATICĂ 385

BIBLIOGRAFIE 401

Scanned with OKEN Scanner

Redactor resp. de carte: DORINA BĂDILĂ
Tehnoredactor: Victoria Stănculescu

Dat la cules: 11. 07. 1966. Bun de tipar: 14. 01. 1967. Tiraj: 3500+125 ex. Hîrtie scris II A 63 g/m². Format: 61×86/16. Coli editoriale: 19,70. Coli tipar: 25,50. A. 13 447. Indici de clasificare zecimală: pentru bibliotecile mari: 51:33, pentru bibliotecile mici: 51.

Tiparul executat sub comanda nr. 523/66 la Intreprinderea Poligrafică Cluj, str. Brassai nr. 5—7, Cluj, Republica Socialistă România

Scanned with OKEN Scanner